Matematická analýza I

Druhá série domácích úkolů

Deadline 16. 4. v 9:00. Řešení ve formátu PDF pošlete mailem na `matej@kam.mff.cuni.cz`. Ideálně LaTeX, můžete ale použít cokoliv jiného (exportovaného do PDF) včetně scanu ručního řešení. Moc vás ale prosím o dobře čitelná řešení.

Pokud není řečeno jinak, můžete bez důkazu používat všechno, co se říkalo na prvních šesti přednáškách a cvičeních, ale nezapomeňte na pečlivé ověření předpokladů! Můžete spolupracovat a používat všechny dostupné materiály pod podmínkou, že všem odevzdaným řešením rozumíte a uměli byste je bez jakýchkoliv pomůcek zopakovat nebo adaptovat na podobný příklad.[1]

Můžete využívat, co znáte o funkcích exp, ln nebo o goniometrických a cyklometrických funkcích (tj. základní vztahy, definiční obor, spojitost atp.).

1. Rozhodněte a dokažtě, zda resp. k čemu konvergují následující řady: [**1 bod**]
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot n$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+2}+3^{n+1}}{5^n}$.

2. Dokažte nebo vyvraťce následující tvrzení. [**2 body**]
   (a) Každá prostá funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (tj. $f(x) = f(y) \implies x = y$) je roustoucí nebo klesající.
   (b) Každá rostoucí funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je prostá.
   (c) Existuje nekonstantní omezená monotónní (tj. rostoucí nebo klesající) funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (d) Existuje prostá funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je periodická (tj. existuje $p > 0$ takové, že $f(x) = f(x+p)$ pro všechna x).

3. Dokažte z definice limity následující tvrzení: [**2 body**]
   (a) $\lim_{x\to a} Ux + V = Ua + V$, kde $U, V \in \mathbb{R}$ jsou nějaké konstanty, (b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x} = -\infty$.

4. Spočítejte následující limity nebo dokažte, že neexistují. Řekněte, která tvrzení využíváte, a ověřte všechny předpoklady: [**2 body**]
   (a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-8x+7}$, (b) $\lim_{x\to 0} \frac{x+3}{x}$, (c) $\lim_{x\to +\infty} \cot\left(\frac{1}{x}\right)$, (d) $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(x)}}$,

5. Rozhodněte, zda jdou následující funkce spojitě dodefinovat na celé $\mathbb{R}$, a pokud ano, udělejte to. [**1 bod**]
   (a) $\frac{x-1}{x^3-x^2+x-1}$, (b) $\frac{\sin(x)}{x^2-1}$.

6. Určete limity funkce $f(x) = \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ v $\pm\infty$ a všech bodech mimo definiční obor (nebo dokažte, že neexistují). Řekněte, která tvrzení využíváte, a ověřte všechny předpoklady: [**2 body**]

https://kam.mff.cuni.cz/~matej/teaching/2021/ma1

[1] To zní fér, ne?