Matematická analýza I

Cvičení #9 – Průběh funkcí & Taylorův polynom

Příklady

1. Nechť funkce f má v bodě a druhou derivaci a platí $f'(a) = 0$. Dokažte, že pokud $f''(a) > 0$ (resp. $f''(a) < 0$) pak f má v a lokální minimum (resp. maximum).

2. Vyšetřete průběh následujících funkcí (to jest, spočítejte definiční obor a obor hodnot, průsečíky s osami, všechny relevantní limity a asymptoty, lokální i globální maxima i minima a vyšetřete konvexitu):
(a) $x^3 - 12x + 16$, (b) $(\ln(x))^2$, (c) $e^{-|x|}$, (d) $x + \cos(x)$, (e) x^2e^{-x}, (f) $\exp\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$.

3. Vypočtěte Taylorův polynom řádu n a jeho zbytek pro následující funkce. Zkuste si rozmyslet, pro jaká x jde zbytek k nule (s $n \to \infty$):

   (a) $\cos(x)$ v 0,
   (b) $\frac{1}{1-x}$ v 0,
   (c) $\sqrt{x}$ v 1.

4. Použijte Taylorův polynom řádu 3 vhodné funkce ve vhodném bodě, abyste aproximovali následující hodnoty. S pomocí Lagrangeova tvaru zbytku určete přesnost odhadu. Potom si to porovnejte se skutečnou hodnotou.

   Na dosazování do Taylorova polynomu a do zbytku můžete použít kalkulačku, ale funkci a bod, v níž Taylorův polynom počítáte, zvolte tak, abyste hodnoty derivací uměli určit bez kalkulačky. (Jinak řečeno, v bodě 4c například nesmíte spočítat T. polynom e^x v 0.01.)

   (a) $\sin(0.1)$,
   (b) $\sqrt{0.98}$,
   (c) $e^{0.01}$,
   (d) 1.01^{10}.