

# Matematická analýza I

## Cvičení #6 – Limity

### Pravidla

Můžete využívat, co znáte o funkcích exp, ln nebo o goniometrických a cyklometrických funkcích (tj. základní vztahy, definiční obor, spojitost atp.), co se jejich limit týče, můžete využívat následující fakty (později se k nim vrátíme, až je budete umět dokázat pomocí l'Hospitalova pravidla).

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$$

### Příklady

1. Určíte limity následujících funkcí v  $\pm\infty$  a všech bodech mimo definiční obor (nebo dokažte, že neexistují). Řekněte, která tvrzení využíváte, a ověřte všechny předpoklady:

$$(a) \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - x}, \quad (b) \frac{3x^2 + 1}{2x^2 + 1}, \quad (c) \frac{2x^2 + 1}{x^3 + 1}, \quad (d) \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}, \quad (e) \frac{x^2}{\cos(x) + 1}.$$

2. Spočítejte následující limity nebo dokažte, že neexistují. Řekněte, která tvrzení využíváte, a ověřte všechny předpoklady:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2^x)}{x}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x^2+4}\right), \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{1}{x}}.$$
$$(e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}.$$

3. Rozhodněte, zda jdou následující funkce spojitě dodefinovat na celé  $\mathbb{R}$ , a pokud ano, udělejte to.

$$(a) \frac{3x}{x^5 + 5x}, \quad (b) \ln\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad (c) \frac{1}{\ln(x^2 + 1)}.$$

4. Dokažte následující variantu věty o limitě složené funkce:

Nechť  $A, B, C \in \mathbb{R}^*$ , nechť  $g(x)$  je funkce splňující  $\lim_{x \rightarrow A} g(x) = B$  a nechť existuje  $\delta > 0$  taková, že pokud  $x \in P(A, \delta)$ , pak  $g(x) > B$ . Nechť  $f(x)$  je funkce splňující  $\lim_{x \rightarrow B^+} f(x) = C$ . Potom  $\lim_{x \rightarrow A} f(g(x)) = C$ .

## Hinty

Hinty čtěte, teprve až si zkusíte nad příkladem zapřemýšlet sami a nebudete vědět, co s ním.

1. Už znáte docela dost tvrzení: Aritmetiku limit, větu o limitě složené funkce, větu o dvou policajtech pro limity, ... Někdy pomůže, že  $a = e^{\ln(a)}$  taky se může hodit, že  $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$ .
2. Je potřeba umět najít definiční obor a počítat limity. Pro podíl polynomů to umíte, u té funkce s kosinem je třeba si s tím pohrát a třeba si nechat vyrobit graf.
3. Nejdřív je potřeba zjistit, ve kterých bodech nejsou funkce definované a pak zjistit, jestli v nich mají limitu.
4. Okopírujte důkaz věty o limitě složené funkce (varianta P2) s tím, že na některých místech použijte jednostranná okolí. (Speciálně to, že  $x \in P(A, \delta)$ , pak  $g(x) > B$  společně s  $\lim_{x \rightarrow A} g(x) = B$  implikuje, že pro každé  $\epsilon > 0$  existuje  $\delta' > 0$  takové, že  $x \in P(A, \delta') \Rightarrow g(x) \in P^+(B, \epsilon)$ .