

Matematická analýza I

Cvičení #5 – Funkce

Příklady

1. Dokažte z definice limity následující tvrzení:

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 3 = 6$, (b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = \infty$.

2. Dokažte, že všechny polynomy jsou spojité. To jest, pokud $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ je polynom a $b \in \mathbb{R}$, pak $\lim_{x \rightarrow b} P(x) = P(b)$. Můžete využít větu o aritmetice limit a tvrzení z domácího úkolu, že lineární funkce jsou spojité.

3. Spočítejte následující limity nebo dokažte, že neexistují. Řekněte, která tvrzení využíváte, a ověřte všechny předpoklady:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$, (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$, (c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$, (d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

4. Spočítejte následující limity nebo dokažte, že neexistují. Řekněte, která tvrzení využíváte, a ověřte všechny předpoklady:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4}$.

Hinty

Hinty čtěte, teprve až si zkusíte nad příkladem zapřemýšlet sami a nebudete vědět, co s ním.

1. Přečtěte si definice, pochopte, co znamenají a pak to udělejte.
2. Využitím věty o limitě součtu dostaňte, že to stačí dokázat pro polynomy tvaru $a_n x^n$. Pak použijte větu o limitě součinu a uvědomte si, že to stačí pro polynomy tvaru x^n (pro konstantní funkce to plyne z domácího úkolu). No a teď stačí použít indukci a limitu o aritmetice součinu, protože $x^n = x \cdot x^{n-1}$.
3. Člověk by chtěl zkusit použít větu o limitě podílu a dosadit, ale dostane výrazy typu $\frac{0}{0}$. To ale znamená, že to, k čemu limitíme (řekněme a), je kořenem polynomu v čitateli i jmenovateli, neboli oba jsou tvaru $(x - a)P(x)$. Vzpomeňte si na střední školu na dělení polynomů, kořen vytkněte, zkraťte a zkuste to znovu :).
4. Když limita neexistuje, zkuste použít Heineho. Pokud existuje, půjde to z definice.