Matematická analýza I

Cvičení #4 – Posloupnosti & řady

Nezapomeňte na první domácí úkol ;)

Příklady

1. Seřaďte následující funkce podle toho, jak rychle rostou (kde $k > 1$ je konstanta): $n, k^n, \sqrt{n}, n^n, n^k, n!$
2. Spočítejte následující limitu, nebo dokažte, že neexistuje: $a_0 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 - a_n}$. Můžete bez důkazu využít, že pokud posloupnost (a_n) má vlastní limitu, pak $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty a_n}}$ (dokážete si to na přednášce později v semestru).
3. Spočítejte $\limsup$ a $\liminf$ následujících posloupností:
   (a) $\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$, (b) $n^{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}$, (c) $(-1)^n \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)$
4. Rozhodněte, zda (příp. k čemu) konvergují následující řady:
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^{n+1}}{6^n}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$.
5. Dokažte, že posloupnost $(1 + \frac{1}{n})^n$ je rostoucí a posloupnost $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ klesající. Odtud odvoďte, že tyto posloupnosti mají stejnou limitu.
6. Dokažte, že $\lim \sqrt[n]{n^2} = 1$, $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ a že $\lim \sqrt[n]{3} = 1$.

Hinty

Hinty si čtěte teprve až si zkusíte nad příkladem zapřemýšlet sami a nebudete vědět, co s ním!

1. Je potřeba pochopit limity typu $\frac{\sqrt{n}}{k^n}$.

2. Vždycky má smysl spočítat si prvních pár členů a podívat se, jak se to chová, jestli to roste, klesá, alternuje, ... Pak si všimněte, že sudé členy tvoří klesající posloupnost, liché členy rostoucí posloupnost a že všechny členy jsou kladné a shora omezené $\sqrt{2}$. Tedy podposloupnost z lichých i ze sudých členů má limitu, stačí dokázat, že jsou ty dvě limity stejné (což plyne např. z toho, že obě podposloupnosti splňují stejnou rekurenci $b_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{2 - b_n}}$).

3. Zase má vždycky smysl si zkusit, jak se posloupnost chová na úvodních členech.
   (a) Tady jde jenom o to, abyste znali standardní hodnoty funkce sinus. Pokud jste to na střední nedělali nebo jste to už zapomněli, oživte si to ;).
   (b) Rozmyslete si, jak se chová $\sin(\frac{\pi n}{2})$, z toho to už je vidět.
   (c) Co kdyby tam chyběl člen $(-1)^n$?

4. Z přednášky znáte definici (částečné součty), víte něco o geometrické řadě a víte něco o řadách $\sum \frac{1}{n^s}$, takže každá úloha musí jít vyřešit s těmito znalostmi.
   (a) Najděte vzorec pro částečné součty.
   (b) Upravte to na rozdíl dvou geometrických řad (z nich jedna je ještě vynásobena konstantou).
   (c) Použijte *parciální zlomky*, tj. uvědomte si, že $\frac{3}{n(n+3)} = \frac{A}{n} - \frac{B}{n+3}$ pro nějaká čísla A a B. Tím to rozdělíte na rozdíl dvou řad typu $\sum \frac{1}{n}$, z nichž jedné chybí několik úvodních členů, a proto se vám kromě těch pár úvodních členů odečtou.

5. Všechny členy obou posloupností jsou kladné, takže posloupnost je rostoucí (klesající), právě když podíl $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ je pro všechna n ostře menší (větší) než 1. To, že mají stejnou limitu, plyne z toho, že podíl n-tých členů těchto dvou posloupností jde k 1 (a z věty o limitě podílu). Mimochodem, tahle limita je přesně číslo e.

6. Ve všech případech je jednoduché odhadnout posloupnosti zdola jedničkou. V prvním případě indukcí dokažte, že je posloupnost klesající (a tedy má limitu) a sporem dokažte, že limita nemůže být > 1 (použijte, že exponenciála roste rychleji než druhá mocnica). Ve druhém i třetím případě použijte policajty s prvním případem.