

Matematická analýza I

Cvičení #3 – Posloupnosti II

Nezapomeňte na první domácí úkol ;)

Příklady

1. Spočítejte následující limity, nebo dokažte, že neexistují:

(a) $n^3 - 12n^2 + 6$, (b) $\frac{n^3+3n^2-n+2}{n^4+1}$, (c) $\frac{n^2-n+1}{1-3n^2}$.

2. Spočítejte následující limity, nebo dokažte, že neexistují:

(a) $\frac{\sin(n)}{n}$, (b) $\frac{n}{2^n}$, (c) $\frac{2^n}{n!}$.

3. Rozmyslete si, jaké implikace platí mezi “posloupnost je shora neomezená” a “posloupnost má limitu nekonečno”.

4. Seřadte následující funkce podle toho, jak rychle rostou (kde $k > 1$ je konstanta): $n, k^n, \sqrt{n}, n^n, n^k, n!$

5. Spočítejte následující limity, nebo dokažte, že neexistují (pro různé hodnoty parametrů to může vycházet různě):

(a) $a_0 = 0, a_{n+1} = \frac{a_n^2}{4} + 1$,

(b) $a_0 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2 - a_n}$. Tady můžete bez důkazu využít, že pokud posloupnost (a_n) má vlastní limitu, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$ (dokážete si to na přednášce později v semestru).

6. Spočítejte \limsup a \liminf následujících posloupností:

(a) $n^{\sin(\frac{\pi n}{2})}$, (b) $\sin(\frac{\pi n}{3})$, (c) $a_0 = 1000, a_{n+1} = \frac{3}{a_n}$, (d) $a_0 = 1000, a_{n+1} = \frac{3}{a_n - 3}$.