Matematická analýza I

Cvičení #2 – Posloupnosti

Příklady

1. Rozhodněte (a dokažte), zda následující posloupnosti mají vlastní limitu
   (a) $a_n = n^2$ (b) $a_n = \sin(n^\circ)$

2. Nechť (a_n) a (b_n) jsou posloupnosti takové, že mají vlastní limity A resp. B. Dokažte, že $a_n + b_n$ má limitu $A + B$.

3. Najděte příklady posloupností (a_n) a (b_n) takové, že mají limity $+\infty$ resp. $-\infty$ a $a_n + b_n$
   (a) nemá limitu, (b) má limitu $+\infty$, (c) má limitu $-\infty$, (d) má limitu $x \in \mathbb{R}$.

4. Spočítejte z definice limity následujících posloupností, nebo dokažte, že neexistují:
   (a) $n^2 + 3$, (b) $\frac{n+1}{n+2}$, (c) $\frac{3n^2+5n}{-n^2+4n}$, (d) $\frac{\sqrt{n}}{n^3+2}$, (e) $\sqrt{n+5} - \sqrt{n-1}$

5. Dokažte, že pokud $\lim a_n > \lim b_n$ (speciálně obě existují), potom existuje n_0 takové, že $(\forall n)(n \geq n_0 \Rightarrow a_n > b_n)$.

6. Dokažte, že pokud $a_n > b_n$ pro všechna $n \geq n_0$ (kde n_0 je nějaká konstanta) a a_n i b_n mají limitu, potom $\lim a_n \geq \lim b_n$. Může nastat rovnost $\lim a_n = \lim b_n$?

7. Rozmyslete si, jaké implikace platí mezi "posloupnost je shora neomezená" a "posloupnost má limitu nekonečno".

8. Pomocí věty o limitě vybrané podposloupnosti dokažte, že následující posloupnost nemá limitu:

$$a_n = \begin{cases} 3 & \text{pokud } n \text{ je sudé,} \\ 5 & \text{pokud } n \text{ je liché.} \end{cases}$$