Matematická analýza I

Cvičení #10 – Primitivní funkce

Příklady

1. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x^2 e^{-x}$. (Rest z minula.)

2. Vyrobte si tabulku primitivních funkcí (včetně intervalů, kde to platí) k následujícím funkcím:
   (a) x^a, $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, (b) $\frac{1}{x}$, (c) e^x, (d) $\sin(x)$, (e) $\cos(x)$, (f) $\frac{1}{\cos^2(x)}$, (g) $\frac{1}{1+x^2}$, (h) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. Spočítejte následující integrály a určete, na kterých intervalech výsledek platí:
   (a) $\int x^3 + 2x^2 - \frac{x}{17}\,dx$, (b) $\int 18e^x + 16e^{8x} + \frac{1}{x} - 3\cos(x)\,dx$, (c) $\int \sqrt{x^6}\,dx$, (d) $\int \frac{(1-y)^3}{y\sqrt[3]{y}}\,dy$.

4. Spočítejte následující integrály a určete, na kterých intervalech výsledek platí:
   (a) $\int x\sin(x)\,dx$, (b) $\int x^a \ln(x)\,dx$, $a > 0$, (c) $\int \frac{x^2}{e^x}\,dx$, (d) $\int \ln(x)\,dx$, (e) $\int \arctan(x)\,dx$, (f) $\int e^x \sin(x)\,dx$, (g) $\int \arcsin(x)\,dx$.

5. Spočítejte následující integrály a určete, na kterých intervalech výsledek platí:
   (a) $\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx$, (b) $\int \sin^7(x)\cos(x)\,dx$, (c) $\int xe^{-x^2}\,dx$, (d) $\int \tan(x)\,dx$, (e) $\int \cot(x)\,dx$, (f) $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$, (g) $\int \frac{x^2}{\cos(x^3)}\,dx$, (h) $\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$, (i) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$.

6. Najděte rekurentní formuli pro $\int \sin^n(x)\,dx$, $n \geq 1$. Určete interval, kde tvrzení platí.

7. Spočítejte následující integrály a určete, na kterých intervalech výsledek platí:
   (a) $\int \frac{3x+5}{2x^2+3x+7}\,dx$, (b) $\int \frac{x^7-5}{x^2-1}\,dx$, (c) $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx$.

Hinty

1. Vzpomeňte si, jestli ty věci nepřipomínají derivace známých funkcí.
2. Integrál součtu a násobený konstantou.
3. Per partes.
4. Substituce.
5. Per partes $(\sin(x) \cdot \sin^{n-1}(x))$, potom využijte, že $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.
6. Parciální zlomky.