

# Matematická analýza I

## Cvičení #1 – Základy

### Příklady

1. Načrtněte grafy následujících funkcí:

(a)  $x^2 - 2x - 4$       (b)  $||x - 1| - 1|$       (c)  $\max\{x + 2, 4 - x^2, 1 - 2x\}$

2. Rozhodněte, zda jsou následující průniky prázdné:

(a)  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, \frac{1}{n})$       (b)  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, \frac{1}{n}]$       (c)  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, \frac{1}{n})$       (d)  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, \frac{1}{n}]$       (e)  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$

3. Následující výroky запиšte pomocí kvantifikátorů a potom je znegujte:

(a) Všechna přirozená čísla jsou sudá.

(b) Každé prvočíslo je liché.

(c) Mezi  $n$  a  $2n$  vždy najdeme nějaké prvočíslo.

(d) Pro každé kladné reálné číslo  $x$  existují právě dvě reálná čísla taková, že  $x$  je jejich druhou mocninou.

4. Rozhodněte (a dokažte), zda jsou následující čísla racionální či iracionální:

(a)  $\sqrt{3}$       (b)  $\sqrt{576}$       (c)  $\sqrt{2048}$

5. Dokažte pro  $a, b \in \mathbb{R}$  trojúhelníkovou nerovnost:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

6. Dokažte, že  $\mathbb{Q}$  je husté v  $\mathbb{R}$ , tedy

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})(a < b \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q})(a < q \wedge q < b)).$$

7. Rozhodněte (a dokažte), zda následující množiny jsou spočetné či nespočetné:

- (a)  $\mathbb{N}^2$       (b) Množina všech konečných podmnožin  $\mathbb{N}$       (c) Množina všech podmnožin  $\mathbb{N}$   
(d) Množina všech iracionálních čísel      (e) Množina všech funkcí  $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$   
(f) Množina všech funkcí  $\{0, 1\} \rightarrow \mathbb{N}$