Základy kombinatoriky a teorie grafů

Cvičení #9 – Vytvořující funkce

Třetí série domácích úkolů

Deadline na dvojnásobek bodů: **19. 5. 2021**
(Na některé úlohy se bude hodit příští přednáška.)

1. Určete koeficient u členu x^{14} ve výrazu $(x + x^3 + x^5 + \cdots)^6$. Vyjádřete jej ve tvaru $\binom{p}{q}$ pro nějaká přirozená p, q. [**3 body**]
2. Graf G má 360 vrcholů a každý jeho vrchol má stupeň 3 nebo 4. Každý vrchol stupně 3 sousedí se dvěma vrcholy stupně 3 a s jedním vrcholem stupně 4. Každý vrchol stupně 4 sousedí s jedním vrcholem stupně 3 a se třemi vrcholy stupně 4. Určete počet hran grafu G. [**2 body**]
3. Spočítejte počet způsobů, jimiž jde konvexní n-úhelník rozdělit pomocí úhlopříček na trojúhelníky. (Abychom neměli různé definice: Pro $n = 4$ je výsledek 2.) Stačí, když najdete rekurenci, nemusíte ji řešit. [**3 body**]
4. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že každá množina N bodů v rovině obsahuje buď n bodů na přímce, anebo n bodů v obecné poloze (tj. žádné dva na přímce). [**2 body**]
5. Dokažte, že pokud $m > 2$ a p je *dostatečně velké* prvočíslo (můžete si zvolit, co znamená dostatečně velké, a může to být v závislosti na m), pak existují $1 \leq a, b, c < p$ taková, že [**6 bodů**]
$$a^m + b^m \equiv c^m \pmod{p}.$$

Opakování

Tyhle věci jako matematici umíte určitě líp než já. *Vytvořující funkce* pro posloupnost $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ je mocninná řada $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$. Například $\frac{1}{1-x}$ je vytvořující funkce pro $(1, 1, \ldots)$ a $(1 + x)^n$ je vytvořující funkce pro $(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots)$ (protože pro $k > n$ platí $\binom{n}{k} = 0$). Pochopitelně, pokud $a(x)$ konverguje na nějakém okolí nuly, tak je takový přechod mezi formálními mocninnými řadami a skutečnými funkcemi legální, protože všechny členy a_i nějak odpovídají derivacím v nule. Speciálně pokud existuje K takové, že $|a_n| \leq K^n$ pro každé n, tak má $a(x)$ nenulový poloměr konvergence.

Příklady

1. Vyřešte DÚ1.
2. Ve zmrzlinářství prodávají 3 druhy zmrzlin — jahodovou, citronovou a čokoládovou. Kolika způsoby si můžete nechat naložit 12 kopečků, pokud od každého druhu chcete alespoň dva kopečky, ale zároveň chcete maximálně tři čokoládové kopečky? (Na pořadí kopečků nezáleží.)
3. Nechť $(a_i), (b_i)$ jsou posloupnosti, $a(x), b(x)$ jejich vytvořující funkce, $\alpha \in \mathbb{R}$ a k přirozené. Vyrobte si tabulku, jakou posloupnost vytváří funkce: $a(x) + b(x)$, $\alpha a(x)$, $a(\alpha x)$, $x^k a(x)$, $a(x^k)$, $a'(x)$, $\int_0^x a(t)dt$, $a(x)b(x)$ a $\frac{a(x)-a_0-a_1x-\cdots-a_{k-1}x^{k-1}}{x^k}$.
4. Najděte vytvořující funkce (v uzavřeném tvaru) pro následující posloupnosti: $(0, 0, -6, 6, -6, 6, -6, \ldots)$, $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \ldots)$, $(1, 4, 9, 16, \ldots)$, $(0, 2, 6, 12, 20, \ldots)$ (tj. součty prvních i kladných sudých čísel).
5. Zjistěte, čemu se rovná a_n, které je zadané rekurentní rovnicí $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$ pro $n \geq 0$.
6. (Tady můžete potřebovat zobecněnou binomickou větu pro neceločíselné exponenty.) Spočítejte, kolik různých dobře uzávorkovaných výrazů se dá dostat z n otevíracích a n uzavíracích závorek. (Pro $n = 2$ jsou to ()() a (()).)

Hinty

1. Uvědomte si, že to je jako hledat koeficient x^8 v $(1 + x^2 + \cdots)^6$ a ten je stejný jako koeficient x^4 v $(1 + x + \cdots)^6$. To je potom to samé jako počet způsobů, jak hodit čtyři identické kuličky do šesti různých pytlů.
2. Vyjádřete si výsledek jako koeficient x^{12} u vhodného polynomu. Například $(x^2 + x^3)$ může znamenat, že chceme alespoň dva, ale nejvýše tři čokoládové kopečky.
3. Prostě si rozmyslete, jak se dané operace s řadami chovají k jejim koeficientům. Tomu, co dělá násobení, se taky někdy říká *konvoluce*.
4. Použijte triky z předchozí úlohy a to, že víte, že $1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$. Často se může hodit si posloupnost rozdělit na dvě podposloupnosti (například tu první na sudé a liché členy) a ty pak sečíst. U druhých mocnin se hodí vědět, že se každá druhá mocnina dá vyjádřit jako součet prvních několika lichých čísel. A ten součet se dá vyrobit jako konvoluce s posloupností samých jedniček.
5. Chce to umět řešit lineární rekurentní rovnice.
6. Vyrobte si rekurenci a vyřešte ji. (Mimochodem, jsou to Catalanova čísla :P.)