Základy kombinatoriky a teorie grafů

Cvičení #6 – Hallova věta & hamiltonovské kružnice

Druhá série domácích úkolů

Deadline na dvojnásobek bodů: **21. 4. 2021**

1. Graf G je *kriticky 2-souvislý graf*, pokud $k_v(G) \geq 2$, ale $k_v(G - e) \leq 1$ pro všechny hrany $e \in E(G)$.
   (a) Dokažte, že G má vrchol stupně 2. (Na tuto úlohu se nevztahuje deadline na dvojnásobek bodů, na přednášce jste zatím neprobrali ušaté lemma.) [**2 body**]
   (b) Pro každé n najděte příklad kriticky 2-souvislého grafu s vrcholem stupně alespoň n. [**1 bod**]
2. Dokažte, že vrcholově 2-souvislý graf je kriticky 2-souvislý právě tehdy, když všechny jeho cykly jsou indukované. Jinak řečeno: Buď $G = (V, E)$ vrcholově 2-souvislý graf. Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní: [**4 body**]
   (a) Pro každé $e \in E$ platí, že $k_v(G - e) \leq 1$,
   (b) Pro každou posloupnost různých vrcholů $v_1, v_2, \ldots, v_n$ takovou, že $v_i v_{i+1} \in E$ pro všechna i ($v_{n+1} = v_1$) platí, že mezi nimi nejsou žádné další hrany.
3. Orientovaný graf $G = (V, E)$ je *silně souvislý*, pokud pro každé $u, v \in V$ obsahuje cesty $u \to v$ i $v \to u$.
   (a) Ukažte, že orientovaný graf je silně souvislý, právě když z každé vlastní podmnožiny $\emptyset \subsetneq X \subsetneq V$ vychází alespoň jedna hrana do $V \setminus X$. [**1 bod**]
   (b) Ukažte, že turnaj (orientace úplného grafu) je silně souvislý právě tehdy, když obsahuje orientovaný hamiltonovský cyklus (tj. orientovanou kružnici, která navstíví každý vrchol právě jednou, kružnice je orientovaná, pokud všechny hrany vedou cyklicky stejným směrem). [**3 body**]

Opakování: Hallova věta

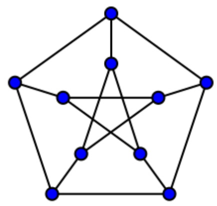
Nechť X a I jsou množiny. *Množinový systém* na X je $|I|$-tice $\mathcal{M} = (M_i : i \in I)$, kde $M_i \subseteq X$. Všimněte si, že se může stát $M_i = M_j$ pro $i \neq j$. *Systém různých reprezentantů* pro $\mathcal{M}$ je **prostá** funkce $f\colon I \to X$ taková, že pro každé $i \in I$ máme $f(i) \in M_i$. Pokud nebude řečeno jinak, předpokládáme, že $X, I \subset \mathbb{N}$ a že X, I i všechny M_i jsou konečné.

Věta 1 (Hallova věta)**.** *Systém různých reprezentantů v $\mathcal{M}$ existuje právě tehdy, když pro každou $J \subseteq I$ platí následující (Hallova) podmínka*

$$\left| \bigcup_{j \in J} M_j \right| \geq |J| \,.$$

Příklady

1. Buďte rádi, že jsem udělal jen dvě iterace. (Nebo by to moc práce nepřidalo?)
   (a) Má systém všech tříprvkových podmnožin množiny $\{1,2,3,4\}$ systém různých reprezentantů?
   (b) Má systém všech tříprvkových podmnožin množiny $\{1,2,3,4,5\}$ systém různých reprezentantů?
2. *Párování* v grafu $G=(V,E)$ je množina $F \subseteq E$ taková, že každý vrchol $v \in V$ patří do nejvýše jedné hrany z F. *Perfektní párování* je párování F takové, že každý vrchol patří do právě jedné hrany F.
   (a) Najděte 6 různých perfektních párování v Petersenově grafu a dokažte, že zádná další neexistují.



   (b) Dokažte, že každý k-regulární bipartitní graf ($k \geq 1$) má perfektní párování.
3. Najděte nekonečný systém množin $\mathcal{M}$, který splňuje Hallovu podmínku (tj. pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje sjednocení libovolné k-tice množin z $\mathcal{M}$ alespoň k prvků), ale nemá systém různých reprezentantů.
4. Nechť $n \geq 3$ je přirozené. Jako $f(n)$ označme maximální počet hran v grafu na n vrcholech, který neobsahuje hamiltonovskou kružnici. Dokažte, že $f(n) = \binom{n-1}{2} + 1$. (Tj. musíte dokázat horní odhad a také zkonstruovat grafy, kde je to těsné.)
5. Je-li G graf a k přirozené číslo, jako G^k označíme graf, kde $V(G^k) = V(G)$ a $uv \in E(G^k)$ právě když vzdálenost mezi u a v v G je nejvýše k.
   (a) Ukažte, že je-li T strom s $|V(T)| \geq 3$, T^3 obsahuje hamiltonovský cyklus.
   (b) Dokažte, že každý souvislý graf G s $|V(G)| \geq 3$ obsahuje G^3 hamiltonovský cyklus (může se vám hodit předchozí bod).
   (c) Najděte souvislý graf G s $|V(G)| \geq 3$ takový, že G^2 neobsahuje hamiltonovský cyklus.

Hinty

Dávám je bez záruky, můžu v nich mít chyby. (Které jsou samozřejmě záměrné a kdyžtak mě na ně upozorněte.)

1. Pokud má, najděte ho. Pokud nemá, najděte protipříklad na Hallovu podmínku. Bonus: Zkuste to vyřešit obecně pro $\{1, \dots, n\}$.
2.
   (a) Prostě to udělejte.

   (b) Předpokládejme, že ten graf má partity A a B. Definujte si množinový systém $\mathcal{M}_A = \{\{b \in B : ab \in E\} : a \in A\}$ tvořený sousedy jednotlivých prvků z A. Rozmyslete si, jestli je nějaký vztah mezi systémy různých reprezentantů $\mathcal{M}_A$ a perfektními párováními v původním grafu.
3. Stačí zvolit $I = X = \mathbb{N}$. Nejdřív si rozmyslete, jestli umíte vytvořit nějaký takový množinový systém, že má právě jeden systém různých reprezentantů (třeba $f(i) = i$). Pak využijte toho, že $\mathbb{N}$ je nekonečné a přidejte jednu množinu :).
4. Pro spodní odhad vezměte úplný graf na $n - 1$ vrcholech, na který přivěsíte jednou hranou jeden vrchol. Pro horní odhad použijte důsledek Chvátalovy věty (ten s $\deg(u) + \deg(v) \geq n$).
5.
   (a) Indukcí podle počtu vrcholů dokažte, že je-li T zakořeněný strom, pak buď $|V(T)| \leq 2$, anebo T^3 obsahuje hamiltonovský cyklus takový, že na něm sousedí kořen s jedním ze svých přímých potomků (přímých v T).

   (b) Vezměte kostru.

   (c) Nechci vám to rovnou prozradit. Z toho, jak zní první část úlohy, asi uhodnete, že existují dokonce takové stromy. (Ve skutečnosti, pokud je graf vrcholově 2-souvislý, pak je jeho druhá mocnina hamiltonovská.) Rozmyslete si, že pokud máte graf, který obsahuje tři vrcholy stupně 2, které mají společného souseda, pak takový graf nemůže být hamiltonovský. Zkuste téhle konfigurace dosáhnout ve druhé mocnině nějakého stromu.