

Základy kombinatoriky a teorie grafů

Cvičení #5 – Souvislost grafů

Opakování: Souvislost grafů

Bud' $G = (V, E)$ graf. G je *souvislý*, pokud mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta. *Hranový řez* G je množina $F \subseteq E$ taková, že graf $(V, E \setminus F)$ je nesouvislý. *Vrcholový řez* G je množina $C \subseteq V$ taková, že graf $G[V \setminus C]$ je nesouvislý (kde $G[A] = (A, E \cap \binom{A}{2})$) je graf, který g indukuje na A).

Hranová souvislost G (značíme $k_e(G)$) je velikost nejmenšího hranového řezu G . *Vrcholová souvislost* G ($k_v(G)$) je $k - 1$, pokud $G \simeq K_k$, a velikost nejmenšího vrcholového řezu G jinak. Graf je *vrcholově (resp. hranově) k -souvislý*, pokud $k_v(G) \geq k$ resp. $k_e(G) \geq k$.

Věta 1 (Fordova–Fulkersonova věta). $k_e(G) \geq k$, právě když mezi každými dvěma vrcholy $u, v \in V$ existuje alespoň k hranově disjunktních cest.

Věta 2 (Mengerova věta). $k_v(G) \geq k$, právě když mezi každými dvěma vrcholy $u, v \in V$ existuje alespoň k vrcholově disjunktních cest (u a v samozřejmě sdílejí).

Příklady

- Dokažte následující tvrzení pro vrcholově k -souvislý graf $G = (V, E)$:
 - Pro každý vrchol $x \in V$ a každou množinu $A \subseteq V$ takovou, že $|A| = k$ a $x \notin A$ existuje k cest z x do vrcholů A takových, že každé dvě z nich sdílejí pouze x .
 - Pro každé dvě disjunktní množiny $A, B \subseteq V$ velikosti k existuje k úplně vrcholově disjunktních cest z A do B .
- Pro hranově 2-souvislý graf G definujeme relaci \simeq na jeho hranách tak, že $e \simeq f$, pokud $e = f$ nebo $G - e - f$ není souvislý. Dokažte následující:
 - $e \simeq f$ právě tehdy, když e a f jsou obsaženy v týchž cyklech.
 - \simeq je ekvivalence.
 - Po odstranění všech hran z nějaké ekvivalenční třídy P relace \simeq dostaneme graf, jehož (netriviální) komponenty jsou hranově 2-souvislé.
 - Kontrahujeme-li každou komponentu $G - P$ do vrcholu, dostaneme na konci cyklus.
- (Robbinsova věta)** Orientovaný graf je silně souvislý, pokud mezi každými dvěma vrcholy existuje orientovaná cesta. Dokažte, že hrany grafu G lze zorientovat tak, že výsledný graf \vec{G} je silně souvislý, právě tehdy, když G je hranově 2-souvislý. (Hint: Využijte předchozí příklad)