

Základy kombinatoriky a teorie grafů

Cvičení #4 – Toky v sítích & souvislost grafů

Opakování: Toky v sítích

Síť $N = (V, E, c, s, t)$ je pětice, kde (V, E) je orientovaný graf, c je funkce $E \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ udávající *kapacity* hran a s a t jsou vrcholy grafu — *zdroj* (*source*) a *stok* (*target*). Tok v N je funkce $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že pro každou hranu $e \in E$ platí $0 \leq f(e) \leq c(e)$ a pro každý vrchol $v \in V \setminus \{s, t\}$ platí

$$\sum_{(u,v) \in E} f(u,v) = \sum_{(v,u) \in E} f(v,u),$$

neboli „co do vrcholu vteče, to z něj i vyteče“. Velikost toku f definujeme jako

$$|f| = \sum_{(u,t) \in E} f(u,t) - \sum_{(t,u) \in E} f(t,u).$$

Cesta (ne nutně orientovaná, tj. mluvíme o posloupnosti hran takové, že každé dvě sousední hrany sdílejí vrchol, ale nemusí to být druhý vrchol první hrany a první vrchol druhé hrany) je *nasycená*, pokud pro nějakou její hranu e platí jedna ze dvou možností

1. e je orientovaná po směru cesty a $f(e) = c(e)$ nebo
2. e je orientovaná proti směru cesty a $f(e) = 0$.

Jako *rezervu* hrany e (vzhledem k nějaké cestě) označíme $r(e) = c(e) - f(e)$, pokud je e orientovaná po směru cesty, a $r(e) = f(e)$ jinak. Tj. cesta je nasycená, pokud obsahuje hranu nulové rezervy. Řez je podmnožina hran taková, že po jejím odstranění neexistuje cesta z s do t , a kapacita řezu R je $\sum_{e \in R} c(e)$.

Ford–Fulkerson

$N = (V, E, c, s, t)$ je síť.

1. $f \leftarrow$ nulový tok
2. Dokud existuje nenasyčená (*zlepšující*) cesta P z s do t :
 - (a) $d \leftarrow \min_{e \in P} r(e)$
 - (b) Zvětšíme tok f podél P o d (tj. každé hraně $e \in P$ zvětšíme/zmenšíme $f(e)$ o d podle toho, jakým směrem e vede).

Opakování: Souvislost grafů

Bud' $G = (V, E)$ graf. G je *souvislý*, pokud mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta. *Hranový řez* G je množina $F \subseteq E$ taková, že graf $(V, E \setminus F)$ je nesouvislý. *Vrcholový řez* G je množina $C \subseteq V$ taková, že graf $G[V \setminus C]$ je nesouvislý (kde $G[A] = (A, E \cap \binom{A}{2})$ je graf, který g indukuje na A).

Hranová souvislost G (značíme $k_e(G)$) je velikost nejmenšího hranového řezu G . *Vrcholová souvislost* G ($k_v(G)$) je $k - 1$, pokud $G \simeq K_k$, a velikost nejmenšího vrcholového řezu G jinak. Graf je *vrcholově* (*resp.* *hranově*) k -*souvislý*, pokud $k_v(G) \geq k$ *resp.* $k_e(G) \geq k$.

Z přednášky víme, že $k_e(G) - 1 \leq k_e(G - e) \leq k_e(G)$ a $k_v(G) - 1 \leq k_v(G - e) \leq k_v(G)$. Možná jsme stihli také FF větu ($k_e(G) \geq k$, právě když mezi každými dvěma vrcholy $u, v \in V$ existuje alespoň k hranově disjunktních cest) a Mengerovu větu ($k_v(G) \geq k$, právě když mezi každými dvěma vrcholy $u, v \in V$ existuje alespoň k vrcholově disjunktních cest (u a v samozřejmě sdílejí)).

Příklady

1. V definici toku omezuje kapacitu hran. Občas by se ale hodilo omezit i kapacitu nějakých vrcholů. Jak takový tok najít?
2. (**Königova věta.**) *Vrcholové pokrytí* grafu G je množina $X \subseteq V(G)$ takové, že každá hrana G je incidentní (obsahuje) s nějakým vrcholem z X . *Párování* v grafu G je množina $M \subseteq E(G)$ taková, že každý vrchol G je incidentní (obsažen) s nejvýše jednou hranou z M . Dokažte, že v každém bipartitním grafu je velikost největšího párování rovna velikosti nejmenšího vrcholového pokrytí.
3. Najděte příklad grafu, kde lze odebrat vrchol tak, že
 - (a) hranová souvislost vzroste (klesne) o libovolné předem dané číslo,
 - (b) vrcholová souvislost vzroste o libovolné předem dané číslo. O kolik může $k_v(G)$ klesnout?
4. Graf je *k-regulární*, má-li všechny stupně rovné k .
 - (a) Ukažte, že pro každé $k \geq 2$ je každý k -regulární souvislý bipartitní graf vrcholově 2-souvislý.
 - (b) Platí předchozí bod i bez předpokladu bipartitnosti?
 - (c) Co kdybychom se ptali na hranovou souvislost?
5. Bud' Q_k hyperkrychle (tj. $Q_k = (\{0, 1\}^k, E)$ a $x, y \in E$, právě když se x, y liší na právě jedné pozici). Ukažte, že $k_v(Q_k) = k$.