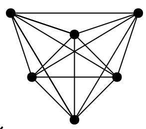
Základy kombinatoriky a teorie grafů

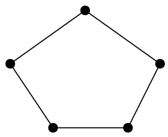
Cvičení #2 – Pořád grafy atd.

Opakování

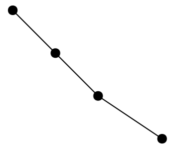
(Neorientovaný) graf G je dvojice (V, E), kde V je množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ množina hran.



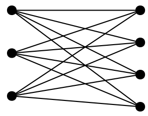
Úplný graf K_n



Cyklus (kružnice) C_n



Cesta P_n



Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$

Graf H je *podgraf* grafu G, pokud $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$, značíme $H \subseteq G$. H je *indukovaný podgraf* G, pokud $H \subseteq G$ a navíc $E(H) = E(G) \cap \binom{H}{2}$.

Stupeň vrcholu v (značíme $\deg_G(v)$) je počet hran G obsahujících v. Graf je souvislý, pokud mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta. *Doplněk grafu* G (značíme $\bar{G}$) je graf s $V(\bar{G}) = V(G)$ a $E(\bar{G}) = \binom{G}{2} \setminus E(G)$.

Je-li $G = (V, E)$ graf a $T = (V, E')$ *strom* (tj. souvislý graf bez kružnic) takový, že $E' \subseteq E$, je T *kostra grafu* G.

Příklady

1. Kolik nejvíce a nejméně listů může mít strom na n vrcholech, který má stupně pouze 1 a 3?
2. Kolik má $K_{2,n}$ různých koster?
3. Kolik nejméně a nejvíce hran může mít graf s n vrcholy a právě k komponentami souvislosti?
4. Definujme (nekonečný) graf $X = (\mathbb{N}, E)$, kde $uv \in E$, právě když $gcd(u, v) > 1$. Dokažte, že X obsahuje každý konečný graf jako indukovaný podgraf.
5. Definujme (spočetně nekonečný) graf $\mathbf{R} = (\mathbb{N}, E)$, kde $uv \in E$, právě když (búno $u < v$) na u-té pozici binárního zápisu v je jednička.
   (a) Dokažte, že pro každé dvě disjunktní konečné $X, Y \subset \mathbb{N}$ existuje $z \in \mathbb{N}$ takové, že $zx \in E$ pro všechna $x \in X$ a $zy \notin E$ pro všechna $y \in Y$.
   (b) Odvoďte z toho, že $\mathbf{R}$ obsahuje každý spočetný graf jako indukovaný podgraf.