# Základy kombinatoriky a teorie grafů

Cvičení #11 – Rovinné grafy & barevnost

## Opakování

Graf $G$ je *rovinný*, pokud má alespoň jedno rovinné nakreslení (tj. nakreslení, kde vrcholy jsou body, hrany jsou křivky spojující vrcholy a hrany se mohou protínat jen ve svých koncových vrcholech). Po odstranění hran se rovina rozpadne na konečný počet souvislých oblastí, které nazýváme *stěnami nakreslení*.

Jako *$k$-obarvení* grafu $G = (V, E)$ nazveme funkci $c\colon V \to \{1, \dots k\}$ takovou, že je-li $uv \in E$, pak $c(u) \neq c(v)$. *Barevnost grafu* $G$, značená jako $\chi(G)$, je nejmenší $k$ takové, že pro $G$ existuje $k$-obarvení.

**Věta 1** (Věta o 4 barvách)**.** *Je-li $G$ rovinný, pak $\chi(G) \leq 4$.*

## Příklady

(Poslední příklad je docela těžký.)

1. *Vnějškově rovinný graf* je takový rovinný graf, který má nakreslení, v němž všechny vrcholy leží na vnější stěně. Dokažte, že každý vnějškově rovinný graf je 3-obarvitelný.
2. Mějme rovinné nakreslení grafu $G$, v němž jsou všechny stěny trojúhelníky. Předpokládejme navíc, že na každém vrcholu leží buď dort, nebo zmrzlina, anebo lízátko. O stěně řekneme, že je *mňamózní*, pokud na jí příslušících vrcholech najdeme všechny tři dobroty (tj. každou právě jednou). Dokažte, že mňamózních stěn je sudý počet.
3. Graf $G$ je kriticky $k$-obarvitelný, pokud $\chi(G) = k$ a každý vlastní podgraf $H \subset G$ je $(k-1)$-obarvitelný. Jako $\delta(G)$ označme minimální stupeň $G$.
   (a) Ukažte, že je-li $G$ kriticky $k$-obarvitelný, pak $\delta(G) \geq k - 1$.
   (b) Dokažte, že pro každý graf $G$ platí $\chi(G) \leq 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(H)$. (Tj. grafy, v nichž všechny podgrafy mají nízký minimální stupeň, mají nízkou barevnost.)
   (c) Pro každé $i$ najděte graf $G_i$ takový, že $\chi(G_i) = 2$, ale $\max_{H \subseteq G_i} \delta(H) \geq i$.
4. Ukažte, že má-li rovinný graf všechny stupně sudé, pak jeho duál má barevnost rovnou dvěma. (Přesnou definici duálu si najděte třeba na Wikipedii. Speciálně je tady třeba povolit i multihrany a stěny velikosti 2.)
5. Dokažte, že $4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$ ($xy \in E$ právě když $\|x - y\| = 1$). Když se budete nudit: Dokažte, že $5 \leq \chi(\mathbb{R}^2)$.

# Hinty

Dávám je bez záruky, můžu v nich mít chyby. (Které jsou samozřejmě záměrné a kdyžtak mě na ně upozorněte.)

1. Zkuste přidat vrchol připojený ke všemu a využít větu o 4 barvách.
2. Řekneme, že hrana je *chutná*, pokud spojuje vrcholy s různými dobrotami. Vyjádřete si počet chutných hran pomocí počtu mňamózních trojúhelníků, *nudných* trojúhelníků (všechny tři vrcholy mají stejnou dobrotu) a *záložních* trojúhelníků (dva vrcholy mají stejnou dobrotu, třetí má jinou). Podívejte se na tu rovnici modulo 2.
3.
   (a) Kdyby měl vrchol malého stupně, odeberte ho, obarvěte zbytek a pak vymyslete barvu pro ten vrchol.
   (b) Použijte předchozí bod.
   (c) jaké grafy mají barevnost 2?
4. Duál duálu je izomorfní původnímu grafu. Graf má barevnost rovnou dvěma, právě když je bipartitní, právě když neobsahuje liché cykly. Kdyby duál obsahoval lichý cyklus, tak obsahuje i lichou stěnu (postupně cyklus ořezejte), ale ta odpovídá vrcholu lichého stupně v původním grafu.
5. Pro horní odhad najděte obarvení, pro spodní odhad najděte nějaký graf, který má barevnost $\geq 4$ a jde vnořit do $\mathbb{R}^2$ tak, že všechny hrany budou úsečky délky 1. Vlastně si to asi prostě najděte na Wikipedii :P.