Základy kombinatoriky a teorie grafů

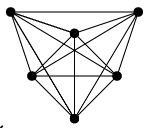
Cvičení #1 – Grafy atd.

Nultý domácí úkol

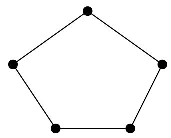
Napište mi, jestli chcete mít své výsledky zveřejněné na webu. Pokud ano, pošlete mi nějakou přezdívku, jíž mám pro zveřejnění použít. (Nepovinně) mi napište pár vět o tom, co vás v matematice zajímá a baví a proč jste si zapsali tenhle předmět. [**5 bodů**]

Opakování

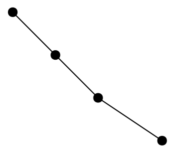
(Neorientovaný) graf G je dvojice (V, E), kde V je množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ množina hran.



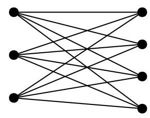
Úplný graf K_n



Cyklus (kružnice) C_n



Cesta P_n



Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$

Graf H je *podgraf* grafu G, pokud $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$, značíme $H \subseteq G$. H je *indukovaný podgraf* G, pokud $H \subseteq G$ a navíc $E(H) = E(G) \cap \binom{H}{2}$.

Stupeň vrcholu v (značíme $\deg_G(v)$) je počet hran G obsahujících v. Graf je souvislý, pokud mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta. *Doplněk grafu* G (značíme $\bar{G}$) je graf s $V(\bar{G}) = V(G)$ a $E(\bar{G}) = \binom{G}{2} \setminus E(G)$.

Je-li $G = (V, E)$ graf a $T = (V, E')$ *strom* (tj. souvislý graf bez kružnic) takový, že $E' \subseteq E$, je T *kostra grafu* G.

Příklady

1. (*Princip sudosti*:) Pro každý graf $G = (V, E)$ platí
$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|.$$
2. Je-li $G = (V, E)$ souvislý graf s $|V| \geq 2$, pak existují $u \neq v \in V$ takové, že $G - u$ i $G - v$ jsou souvislé.
3. Doplněk každého nesouvislého grafu je souvislý. (Platí, že doplněk každého souvislého grafu je nesouvislý?)
4. Existuje graf s alespoň dvěma vrcholy, jehož vrcholy mají navzájem různé stupně?
5. Kolik nejvíce a nejméně listů může mít strom na n vrcholech, který má stupně pouze 1 a 3?
6. Kolik má $K_{2,n}$ různých koster?
7. Kolik nejméně a nejvíce hran může mít graf s n vrcholy a právě k komponentami souvislosti?
8. Sestrojte nekonečně mnoho grafů, které jsou izomorfní svému doplňku.