

Matematická analýza I

Cvičení #9 – l'Hospital a průběh funkcí #2

Devátá série domácích úkolů

Deadline 24. 4., 10:40

1. Vyšetřete průběh následujících funkcí. To jest, spočítejte definiční obor a obor hodnot, průsečíky s osami, všechny relevantní limity a asymptoty, lokální i globální maxima i minima a vyšetřete konvexitu. **A načrtněte graf, jak nejlépe umíte [2 body]**
(a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$, (b) $f(x) = x - \sin(x)$.
Když hledáte nulové body polynomu moc velkého stupně, zkuste WolframAlpha, třeba má nějaké pěkné ;). U druhé úlohy se vám může hodit nějaká nerovnost.

Příklady

1. Nechť funkce f má v bodě a druhou derivaci a platí $f'(a) = 0$. Dokažte, že pokud $f''(a) > 0$ (resp. $f''(a) < 0$) pak f má v a lokální minimum (resp. maximum).
2. Dokažte následující nerovnosti:
 - (a) Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $e^x \geq 1 + x$,
 - (b) pro všechna $x \in (-1, \infty)$ platí $\ln(1 + x) \leq x$,
 - (c) pro všechna $x \in (-1, \infty)$ platí $\ln(1 + x) \geq \frac{x}{1+x}$,
 - (d) pro všechna $x \geq 0$ platí $\sin(x) \leq x$.
3. Vyřešte následující úlohy:
 - (a) Který z obdélníků o obvodu ℓ má největší obsah?
 - (b) Který z válců o objemu V má nejmenší povrch?
 - (c) Ze čtvercového papíru odstříhneme v rozích malé čtverce a složíme krabíčku (bez víka). Jak velké čtverce máme odstříhnout, aby krabíčka měla největší možný objem?
4. Najděte lokální a globální extrémy následujících funkcí:
 - (a) $x^{\frac{1}{x}}$ pro $x > 0$,
 - (b) $x^2 e^{-x}$,
 - (c) $2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$,
 - (d) $\arccos(x)$.
5. Vyšetřete průběh následujících funkcí (to jest, spočítejte definiční obor a obor hodnot, průsečíky s osami, všechny relevantní limity a asymptoty, lokální i globální maxima i minima a vyšetřete konvexitu):
 - (a) $x^3 - 12x + 16$,
 - (b) $(\ln(x))^2$,
 - (c) e^{-x^2} ,
 - (d) $x - \sin(x)$ (nakonec DÚ),
 - (e) $\frac{|2x-1|}{(x-1)^2}$,
 - (f) $\exp\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$.
6. Spočítejte následující limity
 - (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}$,
 - (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos(x) - 1}$,
 - (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\arcsin(x)}$,
 - (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right)$,
 - (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x)$,
 - (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$,
 - (g) $\lim_{x \rightarrow \infty} x - \ln(x + 1)$,
 - (h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$,
 - (i) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$,
 - (j) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\cot(x)^2}$.