

# Matematická analýza I

## Cvičení #8 – l'Hospital a průběh funkcí

### Osmá série domácích úkolů

Deadline 17. 4., 10:40

1. Vyšetřete průběh funkce  $\frac{\sin(x)}{x}$ . To jest, spočítejte definiční obor a obor hodnot, průsečíky s osami, všechny relevantní limity a asymptoty, lokální i globální maxima i minima a vyšetřete konvexitu. Při počítání limity  $x \rightarrow 0$  nesmíte použít, že ji znáte (použijte l'Hospitala). [1 bod]
2. (Bonus:) Dokud neumíte integrovat, najděte funkci  $f(x)$  takovou, že  $f'(x) = g(x)$ , kde: [0 bodů]  
(a)  $g(x) = x$ , (b)  $g(x) = 3x^2 + 2$ , (c)  $g(x) = \sin(x)$ , (d)  $g(x) = \ln(x)$  (těžší).

### Příklady

Příklady jsou seřazeny podle užitečnosti.

1. Nechť funkce  $f$  má v bodě  $a$  druhou derivaci a platí  $f'(a) = 0$ . Dokažte, že pokud  $f''(a) > 0$  (resp.  $f''(a) < 0$ ) pak  $f$  má v  $a$  lokální minimum (resp. maximum).
2. Dokažte následující nerovnosti:
  - (a) Pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  platí  $e^x \geq 1 + x$ ,
  - (b) pro všechna  $x \in (-1, \infty)$  platí  $\ln(1 + x) \leq x$ ,
  - (c) pro všechna  $x \in (-1, \infty)$  platí  $\ln(1 + x) \geq \frac{x}{1+x}$ ,
  - (d) pro všechna  $x \geq 0$  platí  $\sin(x) \leq x$ .
3. Vyřešte následující úlohy:
  - (a) Který z obdélníků o obvodu  $\ell$  má největší obsah?
  - (b) Který z válců o objemu  $V$  má nejmenší povrch?
  - (c) Ze čtvercového papíru odstříhneme v rozích malé čtverce a složíme krabičku (bez víka). Jak velké čtverce máme odstříhnout, aby krabička měla největší možný objem?
4. Najděte lokální a globální extrémy následujících funkcí:
  - (a)  $x^{\frac{1}{x}}$  pro  $x > 0$ ,
  - (b)  $x^2 e^{-x}$ ,
  - (c)  $2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ ,
  - (d)  $\arccos(x)$ .
5. Vyšetřete průběh následujících funkcí (to jest, spočítejte definiční obor a obor hodnot, průsečíky s osami, všechny relevantní limity a asymptoty, lokální i globální maxima i minima a vyšetřete konvexitu):
  - (a)  $x^3 - 12x + 16$ ,
  - (b)  $(\ln(x))^2$ ,
  - (c)  $e^{-x^2}$ ,
  - (d)  $x - \sin(x)$ ,
  - (e)  $\frac{|2x-1|}{(x-1)^2}$ ,
  - (f)  $\exp\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$ .
6. Spočítejte následující limity
  - (a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}$ ,
  - (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos(x) - 1}$ ,
  - (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\arcsin(x)}$ ,
  - (d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right)$ ,
  - (e)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x)$ ,
  - (f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ ,
  - (g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x - \ln(x + 1)$ ,
  - (h)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ ,
  - (i)  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$ ,
  - (j)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\cot(x)^2}$ .