

# Matematická analýza I

## Cvičení #7 – Derivace

### Pravidla

Pokud není řečeno jinak, můžete využívat (po ověření předpokladů) všechny vaše znalosti o limitách a všechna tvrzení uvedená ve skriptech k sedmé přednášce. Za známé můžete používat následující derivace, ostatní je třeba odvodit: (Tvrzení platí samozřejmě jen tam, kde dávají smysl.)

1.  $(x^n)' = nx^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,
2.  $\exp(x)' = \exp(x)$ ,
3.  $\sin(x)' = \cos(x)$ ,
4.  $\cos(x)' = -\sin(x)$ ,
5.  $\ln(x)' = \frac{1}{x}$ .

### Sedmá série domácích úkolů

Deadline 10. 4., 10:40

1. Z definice spočítejte následující derivace: [**1 bod**]  
(a)  $x^2 + 1$  v bodě 3,      (b)  $\frac{1}{x-1} + 7$  v bodě 0.
2. Spočítejte derivace následujících funkcí ve všech bodech, kde existují (nemusíte počítat jednostranné derivace v krajních bodech): [**2 body**]  
(a)  $\arcsin(x)$ ,  
(b)  $\sqrt{\frac{x^2+1}{x^4+3}}$ ,  
(c)  $\cos(\sqrt{x-1})$ ,  
(d)  $x^{\sqrt{x}}$  (kde  $0^0 = 1$ ),  
(e)  $\ln|x|$ ,  
(f)  $\frac{2^x x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ ,  
(g)  $17x^{1234} + 42x^{42} - \pi x^3 + 7 - \frac{1}{x^5}$ .
3. Spočítejte derivaci funkce  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ve všech bodech, kde existuje, kde  $f$  je definovaná jako [**1 bod**]

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{pokud } x \neq 0 \\ 1 & \text{pokud } x = 0. \end{cases}$$

## Příklady

1. Z definice spočítejte následující derivace:

(a)  $\frac{1}{x^2}$  v bodě  $-1$ ,

(b)  $\frac{x^2-1}{x^2+1}$  v bodě  $a \in \mathbb{R}$ .

2. Spočítejte derivace následujících funkcí ve všech bodech, kde existují (nemusíte počítat jednostranné derivace v krajních bodech).

(a)  $x^r$ ,  $x > 0$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ,

(b)  $\tan(x)$  pro  $x \neq k\frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

(c)  $\arccos(x)$ ,

(d)  $\arctan(x)$ ,

(e)  $\frac{x-1}{x+1}$ ,

(f)  $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ ,

(g)  $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ ,

(h)  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ ,

(i)  $\sqrt{\sin(x)}$ ,

(j)  $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ ,

(k)  $\ln(\sin(x))$ ,

(l)  $x^x$ ,

(m)  $x^{\frac{1}{x}}$ ,

(n)  $e^{\sqrt{x+1}}$ ,

(o)  $\cos(x)^{\sin(x)}$  na  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,

(p)  $x|x|$ ,

(q)  $10x^{2020} + 17x^7 - 42x^2 + 5 - \frac{1}{x}$ ,

(r)  $\arcsin(\sin(x))$ ,

(s)  $\arctan(\ln(x))$ .

3. Spočítejte derivaci funkce  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ve všech bodech, kde existuje, kde  $f$  je definovaná jako

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pokud } x \neq 0 \\ 0 & \text{pokud } x = 0. \end{cases}$$

## Hinty

Hinty čtěte, teprve až si zkusíte nad příkladem zapřemýšlet sami a nebudete vědět, co s ním.

Prostě to udělejte. U výpočtu z definice je třeba napsat definici a tu limitu vypočítat. U poslední úlohy musíte udělat extra práci v bodě 0, kde je třeba spočítat nějaké limity. U prostřední úlohy si vzpomeňte na to, co všechno víte o derivacích (součet, součin, podíl, složená funkce, inverzní funkce, ...). Taký se hodí vědět, že  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$