

Matematická analýza I

Cvičení #5 – Funkce

Pátá série domácích úkolů

Deadline 27. 3., 10:40

1. Dokažte nebo vyvráťte následující tvrzení. [2 body]
 - (a) Každá prostá funkce $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je roustoucí nebo klesající.
 - (b) Každá rostoucí funkce $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je prostá.
 - (c) Existuje nekonstantní omezená monotónní funkce $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - (d) Existuje prostá funkce $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která je periodická.
 - (e) Je-li $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotónní a prostá, pak $f^{<-1>}$ je také monotónní a prostá.(Bonus) Každá **spojitá** prostá funkce je monotónní. (Hint: Darbouxova věta.)
2. Dokažte z definice limity následující tvrzení: [1 bod]
 - (a) $\lim_{x \rightarrow a} Ux + V = Ua + V$, kde $U, V \in \mathbb{R}$,
 - (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-1}{x} = -\infty$.
3. Spočítejte následující limity nebo dokažte, že neexistují. Řekněte, která tvrzení využíváte, a ověřte všechny předpoklady: [1 bod]
 - (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-8x+7}$,
 - (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin(x)$,
 - (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x}$.

Příklady

1. Dokažte z definice limity následující tvrzení:
 - (a) $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 3 = 6$,
 - (b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = \infty$.
2. Dokažte, že všechny polynomy jsou spojité. To jest, pokud $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ je polynom a $b \in \mathbb{R}$, pak $\lim_{x \rightarrow b} P(x) = P(b)$. Můžete využít větu o aritmetice limit a tvrzení z domácího úkolu, že lineární funkce jsou spojité.
3. Spočítejte následující limity nebo dokažte, že neexistují. Řekněte, která tvrzení využíváte, a ověřte všechny předpoklady:
 - (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$,
 - (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$,
 - (c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$,
 - (d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x^3-x^2-x+1}$.
4. Spočítejte následující limity nebo dokažte, že neexistují. Řekněte, která tvrzení využíváte, a ověřte všechny předpoklady:
 - (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$,
 - (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4}$.

Hinty

Hinty čtěte, teprve až si zkusíte nad příkladem zapřemýšlet sami a nebudete vědět, co s ním.

1. Přečtěte si definice, pochopte, co znamenají a pak to udělejte.
2. Využitím věty o limitě součtu dostaňte, že to stačí dokázat pro polynomy tvaru $a_n x^n$. Pak použijte větu o limitě součinu a uvědomte si, že to stačí pro polynomy tvaru x^n (pro konstantní funkce to plyne z domácího úkolu). No a teď stačí použít indukci a limitu o aritmetice součinu, protože $x^n = x \cdot x^{n-1}$.
3. Člověk by chtěl zkusit použít větu o limitě podílu a dosadit, ale dostane výrazy typu $\frac{0}{0}$. To ale znamená, že to, k čemu limitíme (řekněme a), je kořenem polynomu v čitateli i jmenovateli, neboli oba jsou tvaru $(x - a)P(x)$. Vzpomeňte si na střední školu na dělení polynomů, kořen vytkněte, zkráťte a zkuste to znovu :).
4. Když limita neexistuje, zkuste použít Heineho. Pokud existuje, půjde to z definice.