Matematická analýza I

Cvičení #4 – Posloupnosti & řady

Čtvrtá série domácích úkolů

Deadline 20. 3.

1. Spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují): [**1 bod**]
   U a) můžete bez důkazu použít, že $\lim \sqrt{a_n + c} = \sqrt{\lim a_n + c}$, pokud $\lim a_n$ existuje.
   Pokud jste to poslali už minulý týden, tak znovu nemusíte (dvakrát za to body stejně nedostanete :P).

   (a) $a_0 = \sqrt{c}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + c}$, kde $c > 0$,

   (b) $a_0 = 4$, $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$.

2. Rozhodněte, zda (příp. k čemu) konvergují následující řady: [**1 bod**]
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot n$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+2}+3^{n+1}-2^n}{5^n}$.

3. Spočítejte lim sup a lim inf následujících posloupností: [**1 bod**]
   (a) $\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right)$, (b) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{1}{a_n - \frac{1}{n}} + \frac{1}{n+1}$.

4. Najděte všechny hromadné body posloupnosti splňující $a_1 = 1$ a

$$a_n = \frac{n}{\min\{d > 1 : d \mid n\}}$$

   pro $n > 1$, kde $d \mid n$ znamená d dělí n. [**1 bod**]

Příklady

1. Spočítejte následující limitu, nebo dokažte, že neexistuje: $a_0 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 - a_n}$.

2. Spočítejte lim sup a lim inf následujících posloupností:
   (a) $\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$, (b) $n^{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}$, (c) $a_0 = 1000$, $a_{n+1} = \frac{3}{a_n}$, (d) $(-1)^n \left(\frac{2n+3}{n+1}\right)$

3. Najděte všechny hromadné body posloupnosti splňující $a_1 = 1$ a $a_n = \min\{d > 1 : d \mid n\}$ pro $n > 1$, kde $d \mid n$ znamená d dělí n.

4. Rozhodněte, zda (příp. k čemu) konvergují následující řady:
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^{n+1}}{6^n}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$.

5. Dokažte, že posloupnost $(1 + \frac{1}{n})^n$ je rostoucí a posloupnost $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ klesající. Odtud odvoďte, že tyto posloupnosti mají stejnou limitu.

6. Dokažte, že $\lim \sqrt[n]{n^2} = 1$, $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ a že $\lim \sqrt[n]{3} = 1$.

7. Dokažte, že geometrická řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konverguje, právě když $|q| < 1$, a to k $\frac{1}{1-q}$.

Hinty

Hinty si čtěte teprve až si zkusíte nad příkladem zapřemýšlet sami a nebudete vědět, co s ním!

1. Vždycky má smysl spočítat si prvních pár členů a podívat se, jak se to chová, jestli to roste, klesá, alternuje, ... Pak si všimněte, že sudé členy tvoří klesající posloupnost, liché členy rostoucí posloupnost a že všechny členy jsou kladné a shora omezené $\sqrt{2}$. Tedy podposloupnost z lichých i ze sudých členů má limitu, stačí dokázat, že jsou ty dvě limity stejné (což plyne např. z toho, že obě podposloupnosti splňují stejnou rekurenci $b_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{2 - b_n}}$).

2. Zase má vždycky smysl si zkusit, jak se posloupnost chová na úvodních členech.

   (a) Tady jde jenom o to, abyste znali standardní hodnoty funkce sinus. Pokud jste to na střední nedělali nebo jste to už zapomněli, oživte si to ;).

   (b) Rozmyslete si, jak se chová $\sin(\frac{\pi n}{2})$, z toho to už je vidět.

   (c) Spočítejte si první čtyři členy. Pak si vyjádřete a_{n+2} v závislosti na a_n.

   (d) Co kdyby tam chyběl člen $(-1)^n$?

3. Rozmyslete si, že pro $n \geq 1$ je každé a_n prvočíslo. Umíte naopak pro každé prvočíslo p a každé n_0 najít $n \geq n_0$ takové, že $a_n = p$?

4. Z přednášky znáte definici (částečné součty), víte něco o geometrické řadě (viz také úloha 7) a víte něco o řadách $\sum \frac{1}{n^s}$, takže každá úloha musí jít vyřešit s těmito znalostmi.

   (a) Najděte vzorec pro částečné součty.

   (b) Upravte to na rozdíl dvou geometrických řad (z nich jedna je ještě vynásobena konstantou).

   (c) Použijte *parciální zlomky*, tj. uvědomte si, že $\frac{3}{n(n+3)} = \frac{A}{n} - \frac{B}{n+3}$ pro nějaká čísla A a B. Tím to rozdělíte na rozdíl dvou řad typu $\sum \frac{1}{n}$, z nichž jedné chybí několik úvodních členů, a proto se vám kromě těch pár úvodních členů odečtou.

5. Všechny členy obou posloupností jsou kladné, takže posloupnost je rostoucí (klesající), právě když podíl $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ je pro všechna n ostře menší (větší) než 1. To, že mají stejnou limitu, plyne z toho, že podíl n-tých členů těchto dvou posloupností jde k 1 (a z věty o limitě podílu). Mimochodem, tahle limita je přesně číslo e.

6. Ve všech případech je jednoduché odhadnout posloupnosti zdola jedničkou. V prvním případě indukcí dokažte, že je posloupnost klesající (a tedy má limitu) a sporem dokažte, že limita nemůže být > 1 (použijte, že exponenciála roste rychleji než druhá mocnica). Ve druhém i třetím případě použijte policajty s prvním případem.

7. Ověřte, že $(1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = 1 - x^{n+1}$, spočítejte částečné součty a z toho odvoďte tvrzení.