Matematická analýza I

Cvičení #3 – Posloupnosti II

Třetí série domácích úkolů

Deadline 13. 3. před cvičením. Můžete používat všechna tvrzení z přednášky i ze cvičení, ale pozor na to, abyste vždycky ověřili všechny předpoklady!

1. Spočítejte následující limity, nebo dokažte, že neexistují (u poslední se vám může hodit Bernoulliho nerovnost): **[1 bod]**
   (a) $\frac{n!}{n^n}$, (b) $\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n}}$, (c) $n^{\cos(\pi n)}$, (d) $(1+x)^n + 3x - \frac{nx}{2}$, kde $x \geq -1$.
2. Dokažte, že pokud $a_n > b_n$ pro všechna $n \geq n_0$ (kde n_0 je nějaká konstanta) a a_n i b_n mají limitu, potom $\lim a_n \geq \lim b_n$. Může nastat rovnost $\lim a_n = \lim b_n$? **[2 body]**
3. Spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují): **[1 bod]**
   Deadline na třetí úkol prodloužen do 20. 3.
   U 1) můžete bez důkazu použít, že $\lim \sqrt{a_n + c} = \sqrt{\lim a_n + c}$.
   (a) $a_0 = \sqrt{c}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + c}$, kde $c > 0$,
   (b) $a_0 = 4$, $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$.

Příklady

1. Spočítejte následující limity, nebo dokažte, že neexistují:
   (a) $\frac{\sin(n)}{n}$, (b) $\frac{n}{2^n}$, (c) $\frac{2^n}{n!}$.
2. Dokažte, že pokud $\lim a_n > \lim b_n$ (speciálně obě existují), potom existuje n_0 takové, že $(\forall n)(n \geq n_0 \Rightarrow a_n > b_n)$.
3. Rozmyslete si, jaké implikace platí mezi "posloupnost je shora neomezená" a "posloupnost má limitu nekonečno".
4. Seřaďte následující funkce podle toho, jak rychle rostou (kde $k > 1$ je konstanta): $n, k^n, \sqrt{n}, n^n, n^k, n!$
5. Spočítejte následující limity, nebo dokažte, že neexistují (pro různé hodnoty parametrů to může vycházet různě):
   (a) $a_0 = 0$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(c - a_n)^2$, kde $0 \leq c \leq 1$,
   (b) $a_0 = c$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{8} + 1$, kde $c \in \mathbb{R}$,
   (c) $a_0 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 - a_n}$.
6. Spočítejte lim sup a lim inf následujících posloupností:
   (a) $n^{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}$, (b) $\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$, (c) $a_0 = 1000$, $a_{n+1} = \frac{3}{a_n}$, (d) $a_0 = 1000$, $a_{n+1} = \frac{3}{a_n - 3}$.