Matematická analýza I

Cvičení #2 – Posloupnosti

Druhá série domácích úkolů

Deadline 6. 3. před cvičením. Při výpočtu limit můžete používat věty o aritmetice limit atp. (pozor na to, abyste ověřili všechny předpoklady!), ale když budete chtít tvrdit něco typu $\lim n = +\infty$, dokažte to z definice.

1. Spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují): **[1 bod]**
   (a) $\frac{(-1)^{n+1}}{2n+(-3)^n}$, (b) $\frac{\pi^{5n}}{3-\pi^{2n}}$, (c) $n^2 3^{-n}$
2. Definujme posloupnost předpisem $a_n = \frac{1-2+3-\cdots+(-1)^{n+1}n}{n}$. Rozhodněte (a dokažte), zda: **[1 bod]**
   (a) (a_n) je omezená, (b) (a_n) je monotonní, (c) (a_n) má limitu, (d) (a_n) obsahuje konvergentní podposloupnost.
3. Spočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují): **[1 bod]**
   (a) $n + \sin(n)$, (b) $\frac{n^3-n+5+\frac{1}{n^6}}{1-n^2}$, (c) $(1-n)^n$.

Příklady

1. Rozhodněte (a dokažte), zda následující posloupnosti mají vlastní limitu
   (a) $a_n = n^2$ (b) $a_n = \sin(n^\circ)$
2. Nechť (a_n) a (b_n) jsou posloupnosti takové, že mají vlastní limity A resp. B. Dokažte, že $a_n + b_n$ má limitu $A + B$.
3. Najděte příklady posloupností (a_n) a (b_n) takové, že mají limity $+\infty$ resp. $-\infty$ a $a_n + b_n$
   (a) nemá limitu, (b) má limitu $+\infty$, (c) má limitu $-\infty$, (d) má limitu $x \in \mathbb{R}$.
4. Spočítejte následující limity, nebo dokažte, že neexistují:
   (a) $\frac{n+1}{n+2}$, (b) $\frac{3n^2+5n}{-n^2+4n}$, (c) $\frac{\sqrt{n}}{n^3+2}$, (d) $\sqrt{n+5} - \sqrt{n-1}$
5. Dokažte, že pokud $\lim a_n > \lim b_n$ (speciálně obě existují), potom existuje n_0 takové, že $(\forall n)(n \geq n_0 \Rightarrow a_n > b_n)$.
6. Dokažte, že pokud $a_n > b_n$ pro všechna $n \geq n_0$ (kde n_0 je nějaká konstanta) a a_n i b_n mají limitu, potom $\lim a_n \geq \lim b_n$. Může nastat rovnost $\lim a_n = \lim b_n$?
7. Rozmyslete si, jaké implikace platí mezi "posloupnost je shora neomezená" a "posloupnost má limitu nekonečno".
8. Seřaďte následující funkce podle toho, jak rychle rostou (kde $k > 1$ je konstanta): $n, k^n, \sqrt{n}, n^n, n^k, n!$
9. Pomocí věty o limitě vybrané podposloupnosti dokažte, že následující posloupnost nemá limitu:
   $$a_n = \begin{cases} 3 & \text{pokud } n \text{ je sudé,} \\ 5 & \text{pokud } n \text{ je liché.} \end{cases}$$
10. Spočítejte limitu následující posloupnosti, nebo dokažte, že posloupnost nekonverguje.
   $$\frac{1+3+\cdots+(2n+1)}{n^2}$$