

# Matematická analýza I

## Cvičení #14 – Aplikace určitého integrálu

### Poslední série domácích úkolů

Deadline 29. 5., 10:40

1. Spočítejte délku křivky  $y = \frac{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}{3}$  pro  $x \in [0, a]$ . [1 bod]
2. Definujme  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  a  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  (těmto funkcím se říká *hyperbolický sinus a kosinus*). Spočítejte objem a povrch rotačního tělesa vzniklého rotací oblasti mezi křivkami  $f(x) = x$  a  $g(x) = \cosh(x)$  kolem osy  $x$  pro  $x \in [0, 1]$ . Můžete využít výsledek třetí úlohy. [2 body]  
Bude se vám hodit, když dokážete, že  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ ,  $\cosh(x)' = \sinh(x)$  a že  $\cosh(x)$  i  $\sinh(x)$  jsou pro  $x \geq 0$  nezáporné.
3. Dokažte, že  $\cosh(x) \geq x$  pro  $x \geq 0$ . [1 bod, ale jenom pokud v součtu máte méně než 40]  
Hint: Spočítejte bod, v němž funkce  $f(x) = \cosh(x) - x$  nabývá globálního minima (pomocí derivací) a dokažte, že v tom bodě je  $f(x) > 0$ . Na to se může hodit odhad  $\cosh(x) \geq \frac{e^x}{2}$  a taky fakt, že  $e > 1 + \sqrt{2} > 2$ .

### Příklady

1. Rozhodněte, zda následující řady konvergují:  
(a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\log_2(k)}$ , (b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ , (c)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k^4+1}$ .
2. Spočítejte délky následujících křivek:  
(a) Obvod kružnice s poloměrem  $r$ ,  
(b)  $y = x^{\frac{3}{2}}$  pro  $x \in [0, a]$ ,  
(c)  $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\ln(x)$  pro  $x \in [1, e]$ .
3. Určete objem:  
(a) Válce s výškou  $h$  a poloměrem podstavy  $r$ ,  
(b) kužele s výškou  $h$  a poloměrem podstavy  $r$ ,  
(c) koule s poloměrem  $r$ ,  
(d) nekonečného „trychtýře“ vzniklého rotací grafu  $f(x) = \frac{1}{x}$  pro  $x \in [1, \infty)$  kolem osy  $x$ ,  
(e) rotačního tělesa vzniklého rotací funkce  $y = \sqrt[3]{x}$  pro  $y \in [1, 2]$  kolem osy  $y$ .
4. Určete povrch:  
(a) Válce s výškou  $h$  a poloměrem podstavy  $r$ ,  
(b) kužele s výškou  $h$  a poloměrem podstavy  $r$ ,  
(c) koule s poloměrem  $r$ ,  
(d) paraboloidu vzniklého rotací křivky  $y = c\sqrt{x}$  kolem osy  $x$  pro  $x \in [0, b]$ ,  
(e) rotačního tělesa vzniklého rotací oblasti mezi křivkami  $f(x) = x$  a  $g(x) = 2x$  kolem osy  $x$  pro  $x \in [0, 1]$ .
5. Bonus. Spočítejte objemy následujících podmnožin  $\mathbb{R}^3$ :  
(a)  $\{(x, y, z) : x \in [0, 1], y \in [0, x], z \in [0, x]\}$ ,  
(b)  $\{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$ ,  
(c)  $\{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x + yz \leq 1\}$ .