

Matematická analýza I

Cvičení #11 – Primitivní funkce

Jedenáctá série domácích úkolů

Deadline 8. 5., 10:40 Spočítejte následující integrály a určete, na kterých intervalech výsledek platí:

1. $\int \frac{2x-x^2}{(x^2+1)(2x+1)} dx$. [1 bod]
2. $\int \cos^n(x) dx$, $n \geq 1$ (rekurentní formule), [1 bod]
3. $\int x^7 \cos(2x^4) dx$, [1 bod]
4. $\int 2 \arctan\left(\frac{6}{a}\right) da$, [1 bod]
5. $\int e^{17x^3} \sin(2x) \ln\left(\frac{x}{x^3+1}\right) dy$, [0 bodů]

Příklady

1. Vyrobtě si tabulku primitivních funkcí (včetně intervalů, kde to platí) k následujícím funkcím:
(a) x^a , $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, (b) $\frac{1}{x}$, (c) e^x , (d) $\sin(x)$, (e) $\cos(x)$, (f) $\frac{1}{\cos^2(x)}$, (g) $\frac{1}{1+x^2}$,
(h) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. Spočítejte následující integrály a určete, na kterých intervalech výsledek platí:
(a) $\int x^3 + 2x^2 - \frac{x}{17} dx$, (b) $\int 18e^x + 16e^{8x} + \frac{1}{x} - 3\cos(x) dx$, (c) $\int \sqrt{x^6} dx$, (d) $\int \frac{(1-y)^3}{y^3\sqrt{y}} dy$.
3. Spočítejte následující integrály a určete, na kterých intervalech výsledek platí:
(a) $\int x \sin(x) dx$, (b) $\int x^a \ln(x) dx$, $a > 0$, (c) $\int \frac{x^2}{e^x} dx$, (d) $\int \ln(x) dx$, (e) $\int \arctan(x) dx$,
(f) $\int e^x \sin(x) dx$, (g) $\int \arcsin(x) dx$.
4. Spočítejte následující integrály a určete, na kterých intervalech výsledek platí:
(a) $\int \sqrt[3]{1-3x} dx$, (b) $\int \sin^7(x) \cos(x) dx$, (c) $\int xe^{-x^2} dx$, (d) $\int \tan(x) dx$, (e) $\int \cot(x) dx$,
(f) $\int \frac{x}{1+x^4} dx$, (g) $\int \frac{x^2}{\cos(x^3)} dx$, (h) $\int \frac{1}{x \ln(x)} dx$, (i) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$.
5. Najděte rekurentní formuli pro $\int \sin^n(x) dx$, $n \geq 1$. Určete interval, kde tvrzení platí.
6. Spočítejte následující integrály a určete, na kterých intervalech výsledek platí:
(a) $\int \frac{3x+5}{2x^2+3x+7} dx$, (b) $\int \frac{x^7-5}{x^2-1} dx$, (c) $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$.

Hinty

1. Vzpomeňte si, jestli ty věci nepřipomínají derivace známých funkcí.
2. Integrál součtu a násobený konstantou.
3. Per partes.
4. Substituce.
5. Per partes ($\sin(x) \cdot \sin^{n-1}(x)$), potom využijte, že $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.
6. Parciální zlomky.