

# Matematická analýza I

## Cvičení #1 – Základy

### První série domácích úkolů

Deadline 28. 2. před cvičením.

1. Napište mi, jestli chcete mít své výsledky zveřejněné na webu. Pokud ano, pošlete mi nějakou přezdívku, jíž mám pro zveřejnění použít. [0 bodů]
2. Rozhodněte (a dokažte), zda jsou následující čísla racionální či iracionální: [2 body]  
(a)  $\sqrt{3}$     (b)  $\sqrt{576}$     (c)  $\sqrt{2048}$
3. Definujme množinu

$$A = \{n \in \mathbb{N} : (\exists x_1 \in \mathbb{N})(\exists x_2 \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})((y \leq n \wedge y \neq n) \Rightarrow (y = x_1 \vee y = x_2))\}.$$

Určete  $\min A$  a  $\max A$ . [2 body]

### Příklady

1. Načrtněte grafy následujících funkcí:  
(a)  $x^2 - 2x - 4$     (b)  $||x - 1| - 1|$     (c)  $\max\{x + 2, 4 - x^2, 1 - 2x\}$
2. Rozhodněte, zda jsou následující průniky prázdné:  
(a)  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, \frac{1}{n})$     (b)  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, \frac{1}{n}]$     (c)  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, \frac{1}{n})$     (d)  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, \frac{1}{n}]$     (e)  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$
3. Následující výroky запиšte pomocí kvantifikátorů a potom je znegujte:
  - (a) Všechna přirozená čísla jsou sudá.
  - (b) Každé prvočíslo je liché.
  - (c) Mezi  $n$  a  $2n$  vždy najdeme nějaké prvočíslo.
  - (d) Pro každé kladné reálné číslo  $x$  existují právě dvě reálná čísla taková, že  $x$  je jejich druhou mocninou.
4. Dokažte pro  $a, b \in \mathbb{R}$  trojúhelníkovou nerovnost:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

5. Dokažte, že  $\mathbb{Q}$  je husté v  $\mathbb{R}$ , tedy

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})(a < b \Rightarrow (\exists q \in \mathbb{Q})(a < q \wedge q < b)).$$

6. Rozhodněte (a dokažte), zda následující množiny jsou spočetné či nespočetné:
  - (a)  $\mathbb{N}^2$
  - (b) Množina všech konečných podmnožin  $\mathbb{N}$
  - (c) Množina všech podmnožin  $\mathbb{N}$
  - (d) Množina všech iracionálních čísel
  - (e) Množina všech funkcí  $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$
  - (f) Množina všech funkcí  $\{0, 1\} \rightarrow \mathbb{N}$