Základy kombinatoriky a teorie grafů

Cvičení #8 – Ramseyova teorie

Opakování

Je-li A množina a $p \in \mathbb{N}$, pak jako $\binom{A}{p}$ značíme množinu všech p-prvkových podmnožin A a pro $n \in \mathbb{N}$ značíme $[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Věta 1 (Ramseyova věta pro p-tice)**.** *Pro všechna $p, n, k \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé obarvení $c\colon \binom{[N]}{p} \to [k]$ najdeme množinu $A \in \binom{[N]}{n}$ takovou, že c je na $\binom{A}{p}$ konstantní. Nejmenší takové N značíme $N = r(p, n, k)$ a nazýváme ho* Ramseyovo číslo *pro p, n, k.*

Důsledek 1. *Pro každé n existuje N takové, že v každém obarvení hran K_N dvěma barvami najdeme monochromatický K_n jako podgraf.*

Věta 2 (Nekonečná Ramseyova věta)**.** *Pro každě $p, k \in \mathbb{N}$ platí, že v každém obarvení $c\colon \binom{\mathbb{N}}{p} \to [k]$ najdeme nějakou nekonečnou $A \subseteq \mathbb{N}$ takovou, že c je na $\binom{A}{p}$ konstantní.*

Příklady

1. (**Happy ending problem.**) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že každá množina N bodů v obecné poloze v $\mathbb{R}^2$ obsahuje n bodů v konvexní poloze (tj. vrcholy konvexního n-úhelníka). Hint: Nejdřív si ručně rozmyslete, že pro $n = 4$ stačí zvolit $N = 5$.
2. Určete nejmenší N takové, že v každém červeno-modrém obarvení hran K_N najdeme buď modrou kopii $K_{1,3}$ nebo červenou kopii K_3.
3. (**Schurova věta**.) Dokažte, že pro každé obarvení všech přirozených čísel (bez nuly) dvěma barvami najdeme $x, y \in \mathbb{N}$ takové, že $x \neq y$ a navíc x, y a $x + y$ mají stejnou barvu.
4. (**Erdösovo–Szekeresovo lemma o podposloupnostech**.)
   (a) Dokažte, že v každé posloupnosti $(n-1)(m-1)+1$ různých přirozených čísel najdeme rostoucí podposloupnost délky n nebo klesající délky m.
   (b) Najděte posloupnost 16 různých přirozených čísel, která neobsahuje rostoucí ani klesající podposloupnost délky 5.
5. (a) Sestrojte libovolně velké $\{0, 1\}$-matice, které neobsahují 2×2 matici se samými nulami ani se samými jedničkami jako *diagonální podmatici.* Matice A o rozměrech $n \times n$ je *diagonální podmatice* $N \times N$ matice B, pokud existuje $R \in \binom{[N]}{n}$ takové, že A dostaneme z B, když vybereme řádky i sloupce s indexy z R.
   (b) Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $DM(n) \in \mathbb{N}$ takové, že každá $\{0, 1\}$-matice $M(n) \times M(n)$ obsahuje $n \times n$ diagonální podmatici, která má všechny prvky na diagonále stejné, všechny prvky nad diagonálou stejné a všechny prvky pod diagonálou stejné.
   (c) Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $M(n) \in \mathbb{N}$ takové, že každá $\{0, 1\}$-matice $M(n) \times M(n)$ obsahuje $n \times n$ podmatici, která obsahuje jen nuly nebo jen jedničky.
6. Najděte 2-obarvení nekonečných podmnožin $\mathbb{N}$ takové, že žádná nekonečná podmnožina $\mathbb{N}$ není jednobarevná (může se hodit axiom výběru).

Hinty

Dávám je bez záruky, můžu v nich mít chyby. (Které jsou samozřejmě záměrné a kdyžtak mě na ně upozorněte.)

1. Rozeberte to pro $n = 4$. Pak obarvěte všechny čtveřice bodů podle toho, jestli daná čtveřice tvoří vrcholy konvexního čtyřúhelníka (anebo jeden je uvnitř trojúhelníka tvořeného zbylými třemi). Z Ramseyovy věty pro p-tice dostanete jednobarevnou množinu. Proč nemůže být jednobarevná v barvě odpovídající nekonvexní poloze? ;)
2. Vzpomeňte si na důkaz, že $r(2, 3, 2) = 6$. Tam člověk zafixoval jeden vrchol, podíval se na červené a modré hrany, které z něj vycházejí, od jedné barvy musely být alespoň 3 a pak se člověk podíval na ty jejich koncové vrcholy – jakou barvu mohou mít hrany mezi nimi? Tak tady to zkuste podobně. Předpokládejte, že máte dostatečně velký graf a zafixujte si jeden vrchol. Z něj vycházají nějaké červené a modré hrany. Pokud jsou ty modré alespoň 3, máte vyhráno. Takže jsou nejvýše dvě. Teď si uvědomte, že na koncových vrcholech červených hran musí být modrý úplný graf (jinak najdete červený trojúhelník). Kdyby ten modrý úplný graf měl alespoň 4 vrcholy, najdete v něm modrou $K_{1,3}$, takže máme nejvýše 3 červené hrany. A teď už je to jenom o tom si s tím pohrát a zjistit, jestli u 2 modrých a 3 červených už i tak najdete jeden z hledaných grafů. Pokud ne, tak zkonstruujete zároveň špatné obarvení. Pokud ano, zkonstruujte špatné obarvení o jedna menšího grafu.
3. Nechť $c\colon \mathbb{N} \to [2]$ je takové obarvení. Zkonstruujte si obarvení $c'\colon \binom{\mathbb{N}}{2} \to [2]$ tak, že $c'(\{x, y\}) = c(|x-y|)$ a najděte jednobarevný trojúhelník v c'.
4. Pro i-tý prvek posloupnosti definujte dvojici (a_i, b_i) takovou, že a_i a b_i jsou největší čísla taková, že i-tý prvek je posledním prvkem nějaké rostoucí podposloupnosti o a_i prvcích a klesající podposloupnosti o b_i prvcích. Rozmyslete si, že žádné dva prvky nemohou mít shodné dvojice a z toho vyvoďte, že v alespoň jedné dvojici musí být $a_i \geq n$ nebo $b_i \geq m$. To vám zároveň napoví, jak zkonstruovat posloupnost pro b).
5. Všimněte si, že diagonála diagonální podmatice je diagonála matice. Takže stačí vzít třeba matici, která má na diagonále jedničky a všude jinde nuly. V b) si uvědomte, že Ramseyova věta říká, že tohle platí pro symetrické matice, které mají na diagonále nuly (vezměte matici sousednosti grafu). Takže stačí použít Ramseyovu větu dvakrát (pro "zesymetričtěný"spodní trojúhelník a pro horní trojúhelník) a pak Dirichletův princip pro diagonálu. U c) najděte matici, která má celo-nulový nebo celo-jedničkový horní trojúhelník a v něm už najdete dostatečně velkou čtvercovou podmatici.
6. Každá nekonečná podmnožina $\mathbb{N}$ je spočetná, a tudíž obsahuje 2^ω nekonečných podmnožin. Prostě si všechny podmnožiny $\mathbb{N}$ uspořádejte a jednu po druhé v nich vyberte dvě podmnožiny, které obarvíte různými barvami. V každém kroku budete mít obarveno $< 2^\omega$ množin a budete mít k dispozici 2^ω podmnožin aktuální množiny, takže budou existovat dvě, které jste ještě neobarvili. (Aby to člověk udělal správně, musí něco vědět o teorii množin, transfinitní indukci atp.)