

# Základy kombinatoriky a teorie grafů

## Cvičení #4 – Souvislost grafů

### Opakování: Souvislost grafů

Bud'  $G = (V, E)$  graf.  $G$  je *souvislý*, pokud mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta. *Hranový řez*  $G$  je množina  $F \subseteq E$  taková, že graf  $(V, E \setminus F)$  je nesouvislý. *Vrcholový řez*  $G$  je množina  $C \subseteq V$  taková, že graf  $G[V \setminus C]$  je nesouvislý (kde  $G[A] = (A, E \cap \binom{A}{2})$  je graf, který  $g$  indukuje na  $A$ ).

*Hranová souvislost*  $G$  (značíme  $k_e(G)$ ) je velikost nejmenšího hranového řezu  $G$ . *Vrcholová souvislost*  $G$  ( $k_v(G)$ ) je  $k - 1$ , pokud  $G \simeq K_k$ , a velikost nejmenšího vrcholového řezu  $G$  jinak. Graf je *vrcholově* (resp. *hranově*)  $k$ -*souvislý*, pokud  $k_v(G) \geq k$  resp.  $k_e(G) \geq k$ .

**Věta 1** (Fordova–Fulkersonova věta).  $k_e(G) \geq k$ , právě když mezi každými dvěma vrcholy  $u, v \in V$  existuje alespoň  $k$  hranově disjunktních cest.

**Věta 2** (Mengerova věta).  $k_v(G) \geq k$ , právě když mezi každými dvěma vrcholy  $u, v \in V$  existuje alespoň  $k$  vrcholově disjunktních cest ( $u$  a  $v$  samozřejmě sdílejí).

### Příklady

1. Dokažte následující tvrzení pro vrcholově  $k$ -souvislý graf  $G = (V, E)$ :
  - (a) Pro každý vrchol  $x \in V$  a každou množinu  $A \subseteq V$  takovou, že  $|A| = k$  a  $x \notin A$  existuje  $k$  cest z  $x$  do vrcholů  $A$  takových, že každé dvě z nich sdílejí pouze  $x$ .
  - (b) Pro každé dvě disjunktní množiny  $A, B \subseteq V$  velikosti  $k$  existuje  $k$  úplně vrcholově disjunktních cest z  $A$  do  $B$ .
2. Bud'  $Q_k$  hyperkrychle (tj.  $Q_k = (\{0, 1\}^k, E)$  a  $x, y \in E$ , právě když se  $x, y$  liší na právě jedné pozici). Ukažte, že  $k_v(Q_k) = k$ .
3. Graf je  $k$ -regulární, má-li všechny stupně rovné  $k$ .
  - (a) Ukažte, že pro každé  $k \geq 2$  je každý  $k$ -regulární souvislý bipartitní graf vrcholově 2-souvislý.
  - (b) Platí předchozí bod i bez předpokladu bipartitnosti?
  - (c) Co kdybychom se ptali na hranovou souvislost?
4. Graf  $G$  je *kriticky 2-souvislý graf*, pokud  $k_v(G) \geq 2$ , ale  $k_v(G - e) \leq 1$  pro všechny hrany  $e \in E(G)$ .
  - (a) Dokažte, že  $G$  má vrchol stupně 2.
  - (b) Pro každé  $n$  najděte příklad kriticky 2-souvislého grafu s vrcholem stupně alespoň  $n$ .
5. Orientovaný graf  $G = (V, E)$  je *silně souvislý*, pokud pro každé  $u, v \in V$  obsahuje cesty  $u \rightarrow v$  i  $v \rightarrow u$ .
  - (a) Ukažte, že orientovaný graf je silně souvislý, právě když z každé vlastní podmnožiny  $\emptyset \subsetneq X \subsetneq V$  vychází alespoň jedna hrana.
  - (b) Ukažte, že každý turnaj (orientace úplného grafu) je silně souvislý právě tehdy, když obsahuje orientovaný hamiltonovský cyklus (tj. kružnici, která navštíví každý vrchol právě jednou).