

# Základy kombinatoriky a teorie grafů

## Cvičení #3 – Toky v sítích & souvislost grafů

### Opakování: Toky v sítích

Síť  $N = (V, E, c, s, t)$  je pětice, kde  $(V, E)$  je orientovaný graf,  $c$  je funkce  $E \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$  udávající *kapacity* hran a  $s$  a  $t$  jsou vrcholy grafu — *zdroj* (*source*) a *stok* (*target*). *Tok* v  $N$  je funkce  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  taková, že pro každou hranu  $e \in E$  platí  $0 \leq f(e) \leq c(e)$  a pro každý vrchol  $v \in V \setminus \{s, t\}$  platí

$$\sum_{(u,v) \in E} f(u,v) = \sum_{(v,u) \in E} f(v,u),$$

neboli „co do vrcholu vteče, to z něj i vyteče“. *Velikost toku*  $f$  definujeme jako

$$|f| = \sum_{(u,t) \in E} f(u,t) - \sum_{(t,u) \in E} f(t,u).$$

Cesta (ne nutně orientovaná, tj. mluvíme o posloupnosti hran takové, že každé dvě sousední hrany sdílejí vrchol, ale nemusí to být druhý vrchol první hrany a první vrchol druhé hrany) je *nasyčená*, pokud pro nějakou její hranu  $e$  platí jedna ze dvou možností

1.  $e$  je orientovaná po směru cesty a  $f(e) = c(e)$  nebo
2.  $e$  je orientovaná proti směru cesty a  $f(e) = 0$ .

Jako *rezervu* hrany  $e$  (vzhledem k nějaké cestě) označíme  $r(e) = c(e) - f(e)$ , pokud je  $e$  orientovaná po směru cesty, a  $r(e) = f(e)$  jinak. Tj. cesta je nasycená, pokud obsahuje hranu nulové rezervy. *Řez* je podmnožina hran taková, že po jejím odstranění neexistuje cesta z  $s$  do  $t$ , a *kapacita* řezu  $R$  je  $\sum_{e \in R} c(e)$ .

### Ford–Fulkerson

$N = (V, E, c, s, t)$  je síť.

1.  $f \leftarrow$  nulový tok
2. Dokud existuje nenasycená (*zlepšující*) cesta  $P$  z  $s$  do  $t$ :
  - (a)  $d \leftarrow \min_{e \in P} r(e)$
  - (b) Zvětšíme tok  $f$  podél  $P$  o  $d$  (tj. každé hraně  $e \in P$  zvětšíme/zmenšíme  $f(e)$  o  $d$  podle toho, jakým směrem  $e$  vede).

### Opakování: Souvislost grafů

Budě  $G = (V, E)$  graf.  $G$  je *souvislý*, pokud mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta. *Hranový řez*  $G$  je množina  $F \subseteq E$  taková, že graf  $(V, E \setminus F)$  je nesouvislý. *Vrcholový řez*  $G$  je množina  $C \subseteq V$  taková, že graf  $G[V \setminus C]$  je nesouvislý (kde  $G[A] = (A, E \cap \binom{A}{2})$  je graf, který  $g$  indukuje na  $A$ ).

*Hranová souvislost*  $G$  (značíme  $k_e(G)$ ) je velikost nejmenšího hranového řezu  $G$ . *Vrcholová souvislost*  $G$  ( $k_v(G)$ ) je  $k - 1$ , pokud  $G \simeq K_k$ , a velikost nejmenšího vrcholového řezu  $G$  jinak. Graf je *vrcholově* (*resp. hranově*)  $k$ -*souvislý*, pokud  $k_v(G) \geq k$  resp.  $k_e(G) \geq k$ .

Z přednášky víme, že  $k_e(G) - 1 \leq k_e(G - e) \leq k_e(G)$  a  $k_v(G) - 1 \leq k_v(G - e) \leq k_v(G)$ . Možná jsme stihli také FF větu ( $k_e(G) \geq k$ , právě když mezi každými dvěma vrcholy  $u, v \in V$  existuje alespoň  $k$  hranově disjunktních cest) a Mengerovu větu ( $k_v(G) \geq k$ , právě když mezi každými dvěma vrcholy  $u, v \in V$  existuje alespoň  $k$  vrcholově disjunktních cest ( $u$  a  $v$  samozřejmě sdílejí)).

## Příklady

1. Najděte orientovaný graf na 4 vrcholech a pro každé  $n$  najděte celočíselné kapacity jeho hran ( $\leq cn$  pro pevné  $c$ ) takové, že existuje posloupnost alespoň  $n$  zlepšujících cest, která odpovídá běhu Ford–Fulkersona na této síti. (Tj. FF může běžet exponenciálně dlouho vzhledem k velikosti vstupu.)
2. **(Königova věta.)** Vrcholové pokrytí grafu  $G$  je množina  $X \subseteq V(G)$  takové, že každá hrana  $G$  je incidentní (obsahuje) s nějakým vrcholem z  $X$ . Párování v grafu  $G$  je množina  $M \subseteq E(G)$  taková, že každý vrchol  $G$  je incidentní (obsažen) s nejvýše jednou hranou z  $M$ . Dokažte, že v každém bipartitním grafu je velikost největšího párování rovna velikosti nejmenšího vrcholového pokrytí.
3. Najděte příklad grafu, kde lze odebrat vrchol tak, že
  - (a) hranová souvislost vzroste (klesne) o libovolné předem dané číslo,
  - (b) vrcholová souvislost vzroste o libovolné předem dané číslo. O kolik může  $k_v(G)$  klesnout?
4. Bud'  $Q_k$  hyperkrychle (tj.  $Q_k = (\{0,1\}^k, E)$  a  $x, y \in E$ , právě když se  $x, y$  liší na právě jedné pozici). Ukažte, že  $k_v(Q_k) = k$ .
5. Graf je  $k$ -regulární, má-li všechny stupně rovné  $k$ .
  - (a) Ukažte, že pro každé  $k \geq 2$  je každý  $k$ -regulární souvislý bipartitní graf vrcholově 2-souvislý.
  - (b) Platí předchozí bod i bez předpokladu bipartitnosti?
  - (c) Co kdybychom se ptali na hranovou souvislost?
6. Graf  $G$  je kriticky 2-souvislý graf, pokud  $k_v(G) \geq 2$ , ale  $k_v(G - e) \leq 1$  pro všechny hrany  $e \in E(G)$ .
  - (a) Dokažte, že  $G$  má vrchol stupně 2.
  - (b) Pro každé  $n$  najděte příklad kriticky 2-souvislého grafu s vrcholem stupně alespoň  $n$ .
7. Orientovaný graf  $G = (V, E)$  je silně souvislý, pokud pro každé  $u, v \in V$  obsahuje cesty  $u \rightarrow v$  i  $v \rightarrow u$ .
  - (a) Ukažte, že orientovaný graf je silně souvislý, právě když z každé vlastní podmnožiny  $\emptyset \subsetneq X \subsetneq V$  vychází alespoň jedna hrana.
  - (b) Ukažte, že každý turnaj (orientace úplného grafu) je silně souvislý právě tehdy, když obsahuje orientovaný hamiltonovský cyklus (tj. kružnici, která navštíví každý vrchol právě jednou).

## Když se budete nudit

Jsou-li  $n$  a  $k$  přirozená čísla, tak jako  $k$ -tý bit  $n$  značíme číslici, která je v binárním zápisu  $n$  na pozici odpovídající  $2^n$  (tj. například nultý bit  $n$  je jedna, právě když  $n$  je liché, stý bit čísel menších než  $2^{100}$  je nula). Bud'  $R$  graf, jehož vrcholy jsou přirozená čísla (včetně nuly) a  $k$  a  $n$  jsou spojené hranou ( $k < n$ ), právě když  $k$ -tý bit  $n$  je roven jedné (tomuhle grafu se říká *Radův graf* nebo také spočetný náhodný graf).

1. Dokažte, že  $R$  má tzv. *rozšiřující vlastnost*, tj. pro každé dvě konečné množiny  $S, N$  vrcholů  $R$  takové, že  $S \cap N = \emptyset$  existuje vrchol  $v$  takový, že je spojený hranou se všemi vrcholy z  $S$  a s žádným z  $N$ .
2. S pomocí předchozího bodu dokažte, že  $R$  obsahuje každý konečný či spočetný graf jako indukovaný podgraf.
3. Dokažte, že pokud je  $G$  spočetný graf, který má rozšiřující vlastnost, tak je  $G$  izomorfní s  $R$ . (Těžší, řekněte si o hint.)