Základy kombinatoriky a teorie grafů

Cvičení #2 – Toky v sítích

První série domácích úkolů

Deadline na dvojnásobek bodů: **10. 3. 2020**

1. Kolik nejméně a nejvíce hran může mít graf s n vrcholy a právě k komponentami souvislosti? (Dokažte to pořádně, ne jako já na prvním cvičení.) [**2 body**]
2. Spočítejte počet (ne nutně indukovaných) kružnic délky k v grafu $K_{m,n}$ (jako funkci proměnných $k, m, n \in \mathbb{N}$). [**2 body**]
3. Nechť T je strom takový, že pro každou jeho hranu e mají obě komponenty $T - e$ lichý počet vrcholů. Dokažte, že všechny vrcholy T mají lichý stupeň. [**3 body**]
4. Dokažte, že pro každé $n \geq 1$ jde K_n rozdělit na n hranově disjunktních cest různé délky, tj. jednu cestu na 1 vrcholu, jednu cestu na 2 vrcholech, ..., jednu cestu na n vrcholech. (Hint: Nejdřív to dokažte pro n liché.) [**4 body**]

Opakování: Toky v sítích

Síť $N = (V, E, c, s, t)$ je pětice, kde (V, E) je orientovaný graf, c je funkce $E \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ udávající *kapacity* hran a s a t jsou vrcholy grafu — *zdroj* (*source*) a *stok* (*target*). *Tok* v N je funkce $f\colon E \to \mathbb{R}$ taková, že pro každou hranu $e \in E$ platí $0 \leq f(e) \leq c(e)$ a pro každý vrchol $v \in V \setminus \{s, t\}$ platí

$$\sum_{(u,v)\in E} f(u, v) = \sum_{(v,u)\in E} f(v, u),$$

neboli „co do vrcholu vteče, to z něj i vyteče“. *Velikost toku* f definujeme jako

$$|f| = \sum_{(u,t)\in E} f(u, t) - \sum_{(t,u)\in E} f(t, u).$$

Cesta (ne nutně orientovaná, tj. mluvíme o posloupnosti hran takové, že každé dvě sousední hrany sdílejí vrchol, ale nemusí to být druhý vrchol první hrany a první vrchol druhé hrany) je *nasycená*, pokud pro nějakou její hranu e platí jedna ze dvou možností

1. e je orientovaná po směru cesty a $f(e) = c(e)$ nebo
2. e je orientovaná proti směru cesty a $f(e) = 0$.

Jako *rezervu* hrany e (vzhledem k nějaké cestě) označíme $r(e) = c(e) - f(e)$, pokud je e orientovaná po směru cesty, a $r(e) = f(e)$ jinak. Tj. cesta je nasycená, pokud obsahuje hranu nulové rezervy. *Řez* je podmnožina hran taková, že po jejím odstranění neexistuje cesta z s do t, a *kapacita* řezu R je $\sum_{e\in R} c(e)$.

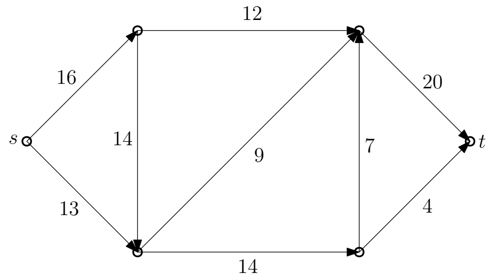
Ford–Fulkerson

$N = (V, E, c, s, t)$ je síť.

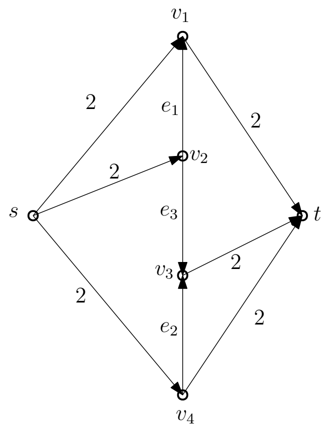
1. $f \leftarrow$ nulový tok
2. Dokud existuje nenasycená (*zlepšující*) cesta P z s do t:
   (a) $d \leftarrow \min_{e\in P} r(e)$
   (b) Zvětšíme tok f podél P o d (tj. každé hraně $e \in P$ zvětšíme/zmenšíme $f(e)$ o d podle toho, jakým směrem e vede).

Příklady

1. Ručně si odkrokujte běh Fordova–Fulkersonova algoritmu na následující síti (pokud se vám chce). Najděte také odpovídající řez maximální kapacity.



2. Kolik různých maximálních toků může mít nějaká síť?
3. Jak dlouho poběží Ford–Fulkerson na následující síti, pokud začne cestou sv_2v_3t a potom bude opakovat posloupnost cest $P_1 = sv_4v_3v_2v_1t$, $P_2 = sv_2v_3v_4t$, P_1, $P_3 = sv_1v_2v_3t$? Zbylé kapacity jsou $c(e_1) = r^0 = 1$, $c(e_2) = r$ a $c(e_3) = 1$, kde $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, tj. $r^2 = 1 - r$. (Viz "Ford–Fulkerson algorithm" na anglické Wiki.)



4. V definici toku omezujeme kapacitu hran. Občas by se ale hodilo omezit i kapacitu nějakých vrcholů. Jak takový tok najít?
5. (**Königova věta**.) *Vrcholové pokrytí* grafu G je množina $X \subseteq V(G)$ takové, že každá hrana G je incidentní (obsahuje) s nějakým vrcholem z X. *Párování* v grafu G je množina $M \subseteq E(G)$ taková, že každý vrchol G je incidentní (obsažen) s nejvýše jednou hranou z M. Dokažte, že v každém bipartitním grafu je velikost největšího párování rovna velikosti nejmenšího vrcholového pokrytí.
6. (Z minula:) Sestrojte nekonečně mnoho grafů, které jsou izomorfní svému doplňku.