Základy kombinatoriky a teorie grafů

Cvičení #6 – Rovinné grafy & barevnost

Druhá série domácích úkolů

Deadline na dvojnásobek bodů: **12. 4. 2018**

1. Dokažte, že vrcholově 2-souvislý graf je kriticky 2-souvislý právě tehdy, když všechny jeho cykly jsou indukované. Jinak řečeno: Buď $G = (V, E)$ vrcholově 2-souvislý graf. Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní: [**4 body**]
   (a) Pro každé $e \in E$ platí, že $k_v(G - e) \leq 1$,
   (b) Pro každou posloupnost různých vrcholů $v_1, v_2, \ldots, v_n$ takovou, že $v_i v_{i+1} \in E$ pro všechna i ($v_{n+1} = v_1$) platí, že mezi nimi nejsou žádné další hrany.
2. Orientovaný graf $G = (V, E)$ je *silně souvislý*, pokud pro každé $u, v \in V$ obsahuje cesty $u \to v$ i $v \to u$.
   (a) Ukažte, že orientovaný graf je silně souvislý, právě když z každé vlastní podmnožiny $\emptyset \subsetneq X \subsetneq V$ vychází alespoň jedna hrana do $V \setminus X$. [**1 bod**]
   (b) Ukažte, že turnaj (orientace úplného grafu) je silně souvislý právě tehdy, když obsahuje orientovaný hamiltonovský cyklus (tj. orientovanou kružnici, která navštíví každý vrchol právě jednou, kružnice je orientovaná, pokud všechny hrany vedou cyklicky stejným směrem). [**3 body**]
3. Jako *obvod* grafu značíme délku jeho nejkratšího cyklu (nekonečno pro lesy). Ukažte, že má-li rovinný graf m hran, n vrcholů a konečný obvod $g \in \mathbb{N}$, tak platí $m \leq \frac{g}{g-2}(n-2)$. [**2 body**]

Opakování

Graf G je *rovinný*, pokud má alespoň jedno rovinné nakreslení (tj. nakreslení, kde vrcholy jsou body, hrany jsou křivky spojující vrcholy a hrany se mohou protínat jen ve svých koncových vrcholech). Po odstranění hran se rovina rozpadne na konečný počet souvislých oblastí, které nazýváme *stěnami nakreslení.*

Jako *k-obarvení* grafu $G = (V, E)$ nazveme funkci $c\colon V \to \{1, \ldots k\}$ takovou, že je-li $uv \in E$, pak $c(u) \neq c(v)$. *Barevnost grafu G*, značená jako $\chi(G)$, je nejmenší k takové, že pro G existuje k-obarvení.

Věta 1 (Eulerova formule). *Pro nakreslení souvislého rovinného grafu o v vrcholech, e hranách a f stěnách platí $v - e + f = 2$.*

Věta 2 (Kuratowského věta). *Graf je rovinný, právě když neobsahuje podrozdělení $K_{3,3}$ ani K_5 jako podgraf.*

Věta 3 (Věta o 4 barvách). *Je-li G rovinný, pak $\chi(G) \leq 4$.*

Příklady

1. *Vnějškově rovinný graf* je takový rovinný graf, který má nakreslení, v němž všechny vrcholy leží na vnější stěně. Dokažte, že každý vnějškově rovinný graf je 3-obarvitelný.
2. Mějme rovinné nakreslení grafu G, v němž jsou všechny stěny trojúhelníky. Předpokládejme navíc, že na každém vrcholu leží buď dort, nebo zmrzlina, anebo lízátko. O stěně řekneme, že je *mňamózní*, pokud na jí příslušících vrcholech najdeme všechny tři dobroty (tj. každou právě jednou). Dokažte, že mňamózních stěn je sudý počet.
3. Ukažte, že má-li rovinný graf všechny stupně sudé, pak jeho duál má barevnost rovnou dvěma.
4. (Nash–Williams theorem.) Ukažte, že hrany každého rovinného grafu jde zorientovat tak, že každý vrchol má výstupní stupeň nejvýše 3.
5. Dokažte, že $4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$ ($xy \in E$ právě když $\|x - y\| = 1$).