Základy kombinatoriky a teorie grafů

Cvičení #4 – Souvislost grafů & Hallova věta

Opakování: Souvislost grafů

Buď $G = (V, E)$ graf. G je *souvislý*, pokud mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta. *Hranový řez* G je množina $F \subseteq E$ taková, že graf $(V, E \setminus F)$ je nesouvislý. *Vrcholový řez* G je množina $C \subseteq V$ taková, že graf $G[V \setminus C]$ je nesouvislý (kde $G[A] = (A, E \cap \binom{A}{2})$ je graf, který g *indukuje* na A).

Hranová souvislost G (značíme $k_e(G)$) je velikost nejmenšího hranového řezu G. *Vrcholová souvislost* G ($k_v(G)$) je $k-1$, pokud $G \simeq K_k$, a velikost nejmenšího vrcholového řezu G jinak. Graf je *vrcholově (resp. hranově) k-souvislý*, pokud $k_v(G) \geq k$ resp. $k_e(G) \geq k$.

Věta 1 (Fordova–Fulkersonova věta)**.** *$k_e(G) \geq k$, právě když mezi každými dvěma vrcholy $u, v \in V$ existuje alespoň k hranově disjunktních cest.*

Věta 2 (Mengerova věta)**.** *$k_v(G) \geq k$, právě když mezi každými dvěma vrcholy $u, v \in V$ existuje alespoň k vrcholově disjunktních cest (u a v samozřejmě sdílejí).*

Opakování: Hallova věta

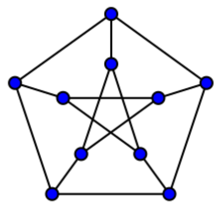
Nechť X a I jsou množiny. *Množinový systém* na X je $|I|$-tice $\mathcal{M} = (M_i : i \in I)$, kde $M_i \subseteq X$. Všimněte si, že se může stát $M_i = M_j$ pro $i \neq j$. *Systém různých reprezentantů* pro $\mathcal{M}$ je **prostá** funkce $f\colon I \to X$ taková, že pro každé $i \in I$ máme $f(i) \in M_i$. Pokud nebude řečeno jinak, předpokládáme, že $X, I \subset \mathbb{N}$ a že X, I i všechny M_i jsou konečné.

Věta 3 (Hallova věta)**.** *Systém různých reprezentantů v $\mathcal{M}$ existuje právě tehdy, když pro každou $J \subseteq I$ platí následující (Hallova) podmínka*

$$\left| \bigcup_{j \in J} M_j \right| \geq |J|\,.$$

Příklady

1. Dokažte následující tvrzení pro vrcholově k-souvislý graf $G = (V, E)$:
   (a) Pro každý vrchol $x \in V$ a každou množinu $A \subseteq V$ takovou, že $|A| = k$ a $x \notin A$ existuje k cest z x do vrcholů Atakových, že každé dvě z nich sdílejí pouze x.
   (b) Pro každé dvě disjunktní množiny $A, B \subseteq V$ velikosti k existuje k úplně vrcholově disjunktních cest z A do B.
2. Buďte rádi, že jsem udělal jen dvě iterace. (Nebo by to moc práce nepřidalo?)
   (a) Má systém všech tříprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ systém různých reprezentantů?
   (b) Má systém všech tříprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ systém různých reprezentantů?
3. *Párování* v grafu $G = (V, E)$ je množina $F \subseteq E$ taková, že každý vrchol $v \in V$ patří do nejvýše jedné hrany z F. *Perfektní párování* je párování F takové, že každý vrchol patří do právě jedné hrany F.
   (a) Najděte 6 různých perfektních párování v Petersenově grafu a dokažte, že zádná další neexistují.



   (b) Dokažte, že každý k-regulární bipartitní graf ($k \geq 1$) má perfektní párování.
4. *Latinský obdélník řádu $k \times n$*, $k \leq n$ je matice $L \in \{1, \ldots, n\}^{k \times n}$, kde se v každém řádku i sloupci vyskytuje každé číslo nejvýše jednou. *Latinský čtverec řádu n* je latinský obdélník řádu $n \times n$. Dokažte, že každý latinský obdélník jde doplnit na latinský čtverec.
5. Najděte nekonečný systém množin $\mathcal{M}$, který splňuje Hallovu podmínku (tj. pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje sjednocení libovolné k-tice množin z $\mathcal{M}$ alespoň k prvků), ale nemá systém různých reprezentantů.
6. Dilworthova věta říká, že má-li v konečném částečném uspořádání $(P, \prec)$ nejdelší antiřetězec délku r, pak lze P rozdělit na r řetězců. Dokažte, že Dilworthova věta implikuje Hallovu větu.

Když se budete nudit

Jsou-li n a k přirozená čísla, tak jako k-tý bit n značíme číslici, která je v binárním zápise n na pozici odpovídající 2^n (tj. například nultý bit n je jedna, právě když n je liché, stý bit čísel menších než 2^{100} je nula). Buď R graf, jehož vrcholy jsou přirozená čísla (včetně nuly) a k a n jsou spojené hranou ($k < n$), právě když k-tý bit n je roven jedné (tomuhle grafu se říká *Radův graf* nebo také spočetný náhodný graf).

1. Dokažte, že R má tzv. *rozšiřující vlastnost*, tj. pro každé dvě konečné množiny S, N vrcholů R takové, že $S \cap N = \emptyset$ existuje vrchol v takový, že je spojený hranou se všemi vrcholy z S a s žádným z N.
2. S pomocí předchozího bodu dokažte, že R obsahuje každý konečný či spočetný graf jako indukovaný podgraf.
3. Dokažte, že pokud je G spočetný graf, který má rozšiřující vlastnost, tak je G izomorfní s R. (Těžší, řekněte si o hint.)