Základy kombinatoriky a teorie grafů

Cvičení #3 – Toky v sítích & souvislost grafů

Opakování: Toky v sítích

Síť $N = (V, E, c, s, t)$ je pětice, kde (V, E) je orientovaný graf, c je funkce $E \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ udávající *kapacity* hran a s a t jsou vrcholy grafu — *zdroj* (*source*) a *stok* (*target*). *Tok* v N je funkce $f\colon E \to \mathbb{R}$ taková, že pro každou hranu $e \in E$ platí $0 \leq f(e) \leq c(e)$ a pro každý vrchol $v \in V \setminus \{s, t\}$ platí

$$\sum_{(u,v)\in E} f(u, v) = \sum_{(v,u)\in E} f(v, u),$$

neboli „co do vrcholu vteče, to z něj i vyteče". *Velikost toku* f definujeme jako

$$|f| = \sum_{(u,t)\in E} f(u, t) - \sum_{(t,u)\in E} f(t, u).$$

Cesta (ne nutně orientovaná, tj. mluvíme o posloupnosti hran takové, že každé dvě sousední hrany sdílejí vrchol, ale nemusí to být druhý vrchol první hrany a první vrchol druhé hrany) je *nasycená*, pokud pro nějakou její hranu e platí jedna ze dvou možností

1. e je orientovaná po směru cesty a $f(e) = c(e)$ nebo
2. e je orientovaná proti směru cesty a $f(e) = 0$.

Jako *rezervu* hrany e (vzhledem k nějaké cestě) označíme $r(e) = c(e) - f(e)$, pokud je e orientovaná po směru cesty, a $r(e) = f(e)$ jinak. Tj. cesta je nasycená, pokud obsahuje hranu nulové rezervy. *Řez* je podmnožina hran taková, že po jejím odstranění neexistuje cesta z s do t, a *kapacita* řezu R je $\sum_{e\in R} c(e)$.

Ford–Fulkerson

$N = (V, E, c, s, t)$ je síť.

1. $f \leftarrow$ nulový tok
2. Dokud existuje nenasycená (*zlepšující*) cesta P z s do t:
   (a) $d \leftarrow \min_{e\in P} r(e)$
   (b) Zvětšíme tok f podél P o d (tj. každé hraně $e \in P$ zvětšíme/zmenšíme $f(e)$ o d podle toho, jakým směrem e vede).

Opakování: Souvislost grafů

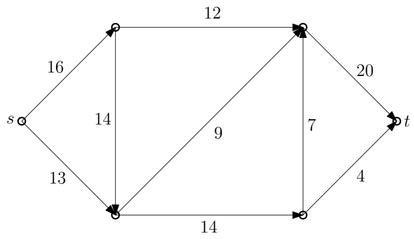
Buď $G = (V, E)$ graf. G je *souvislý*, pokud mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta. *Hranový řez* G je množina $F \subseteq E$ taková, že graf $(V, E \setminus F)$ je nesouvislý. *Vrcholový řez* G je množina $C \subseteq V$ taková, že graf $G[V \setminus C]$ je nesouvislý (kde $G[A] = (A, E \cap \binom{A}{2})$ je graf, který g *indukuje* na A).

Hranová souvislost G (značíme $k_e(G)$) je velikost nejmenšího hranového řezu G. *Vrcholová souvislost* G ($k_v(G)$) je $k - 1$, pokud $G \simeq K_k$, a velikost nejmenšího vrcholového řezu G jinak. Graf je *vrcholově (resp. hranově) k-souvislý*, pokud $k_v(G) \geq k$ resp. $k_e(G) \geq k$.

Z přednášky víme, že $k_e(G) - 1 \leq k_e(G - e) \leq k_e(G)$ a $k_v(G) - 1 \leq k_v(G - e) \leq k_v(G)$. Možná jsme stihli také FF větu ($k_e(G) \geq k$, právě když mezi každými dvěma vrcholy $u, v \in V$ existuje alespoň k hranově disjunktních cest) a Mengerovu větu ($k_v(G) \geq k$, právě když mezi každými dvěma vrcholy $u, v \in V$ existuje alespoň k vrcholově disjunktních cest (u a v samozřejmě sdílejí)).

Příklady

1. Ručně si odkrokujte běh Fordova–Fulkersonova algoritmu na následující síti (pokud se vám chce). Najděte také odpovídající řez maximální kapacity.



2. Najděte orientovaný graf na 4 vrcholech a pro každé n celočíselné kapacity jeho hran ($\leq cn$ pro pevné c) takové, že existuje posloupnost alespoň n zlepšujících cest, která odpovídá běhu Ford–Fulkersona na této síti. (Tj. FF může běžet exponenciálně dlouho vzhledem k velikosti vstupu.)
3. (**Königova věta**.) *Vrcholové pokrytí* grafu G je množina $X \subseteq V(G)$ takové, že každá hrana G je incidentní (obsahuje) s nějakým vrcholem z X. *Párování* v grafu G je množina $M \subseteq E(G)$ taková, že každý vrchol G je incidentní (obsažen) s nejvýše jednou hranou z M. Dokažte, že v každém bipartitním grafu je velikost největšího párování rovna velikosti nejmenšího vrcholového pokrytí.
4. Najděte příklad grafu, kde lze odebrat vrchol tak, že
   (a) hranová souvislost vzroste (klesne) o libovolné předem dané číslo,
   (b) vrcholová souvislost vzroste o libovolné předem dané číslo. O kolik může $k_v(G)$ klesnout?
5. Buď Q_k hyperkrychle (tj. $Q_k = (\{0,1\}^k, E)$ a $x, y \in E$, právě když se x, y liší na právě jedné pozici). Ukažte, že $k_v(Q_k) = k$.
6. Graf je *k-regulární*, má-li všechny stupně rovné k.
   (a) Ukažte, že pro každé $k \geq 2$ je každý k-regulární souvislý bipartitní graf vrcholově 2-souvislý.
   (b) Platí předchozí bod i bez předpokladu bipartitnosti?
   (c) Co kdybychom se ptali na hranovou souvislost?
7. Graf G je *kriticky 2-souvislý graf*, pokud $k_v(G) \geq 2$, ale $k_v(G - e) \leq 1$ pro všechny hrany $e \in E(G)$.
   (a) Dokažte, že G má vrchol stupně 2.
   (b) Pro každé n najděte příklad kriticky 2-souvislého grafu s vrcholem stupně alespoň n.
8. Orientovaný graf $G = (V, E)$ je *silně souvislý*, pokud pro každé $u, v \in V$ obsahuje cesty $u \to v$ i $v \to u$.
   (a) Ukažte, že orientovaný graf je silně souvislý, právě když z každé vlastní podmnožiny $\emptyset \subsetneq X \subsetneq V$ vychází alespoň jedna hrana.
   (b) Ukažte, že každý turnaj (orientace úplného grafu) je silně souvislý právě tehdy, když obsahuje orientovaný hamiltonovský cyklus (tj. kružnici, která navstíví každý vrchol právě jednou).

Když se budete nudit

Jsou-li n a k přirozená čísla, tak jako k-tý bit n značíme číslici, která je v binárním zápise n na pozici odpovídající 2^n (tj. například nultý bit n je jedna, právě když n je liché, stý bit čísel menších než 2^{100} je nula). Buď R graf, jehož vrcholy jsou přirozená čísla (včetně nuly) a k a n jsou spojené hranou ($k < n$), právě když k-tý bit n je roven jedné (tomuhle grafu se říká *Radův graf* nebo také spočetný náhodný graf).

1. Dokažte, že R má tzv. *rozšiřující vlastnost*, tj. pro každé dvě konečné množiny S, N vrcholů R takové, že $S \cap N = \emptyset$ existuje vrchol v takový, že je spojený hranou se všemi vrcholy z S a s žádným z N.
2. S pomocí předchozího bodu dokažte, že R obsahuje každý konečný či spočetný graf jako indukovaný podgraf.
3. Dokažte, že pokud je G spočetný graf, který má rozšiřující vlastnost, tak je G izomorfní s R. (Těžší, řekněte si o hint.)