Zadání

Dokažte pro orientovaný graf G, že následující je ekvivalentní

1. G má uzavřený eulerovský orientovaný tah.
2. G je silně souvislý a vstupní stupeň každého vrcholu je roven výstupnímu stupni.
3. G je slabě souvislý a vstupní stupeň každého vrcholu je roven výstupnímu stupni.

Nápověda: Důkaz je podobný důkazu pro neorientované grafy.

Řešení

Vrcholy G budeme označovat jako $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Důkaz 1 $\Rightarrow$ 2:
Uzavřený eulerovský tah projde všechny hrany grafu. Tah také projde všechny vrcholy. Uvažme libovolný vrchol v_i. Tah musí navštívit tento vrchol nejméně jednou, ale je možné, že ho navštíví vícekrát (označme počet návštěv x). Vždy, když tah vstoupí do vrcholu, musí z něj i odejít. Pro každou návštěvu je tedy použita 1 hrana vedoucí do v_i a jedna hrana vedoucí z v_i. Celkem po x návštěvách je použito x hran vedoucích do v_i a x hran vedoucích z v_i. Žádné jiné hrany, než těchto $2x$ hran neexistuje, protože tah je euleroský a musel použít všechny hrany incidentní s v_i. Potom nutně $deg_-(v_i) = deg_+(v_i)$.

Silná souvislost grafu plyne z toho, že následováním vrcholů v pořádí tahu se lze dostat z libovolného vrcholu do libovolného jiného vrcholu. Každé dva vrcholy jsou tedy propojeny orientovaným tahem, který je dán vhodným zkrácením celého eulerovského tahu.

Důkaz 2 $\Rightarrow$ 3:
Triviální, protože silná souvislost implikuje slabou souvislost.

Důkaz 3 $\Rightarrow$ 1:
Mějme slabě souvislý $G = (V, E)$ s rovnými vstupními a výstupními stupni. Uvažme nejdelší možný tah $T = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_m, v_m)$ v grafu G. Tah T je nutně uzavřený ($v_0 = v_m$). Kdyby nebyl, potom bylo požito o 1 více vstupních hran v_m, než výstupních hran v_m. Z rovnosti stupňů plyne, že tah lze prodloužit o další výstupní hranu v_m, což je spor s maximalní délkou T. Máme $v_0 = v_m$. Dále dokazujeme, že tah projde všechny hrany, neboli $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Definujme pomocný graf $G' = (V', E')$, kde V' je množina vrcholů, které tah T skutečně projde a E' je množina hran, které tah T skutečně projde. Pokud pro spor $V \neq V'$,

potom ze slabé souvislosti G existuje hrana tvaru $e = \{v_k, v'\}$, kde $v_k \in V'$ a $v' \notin V'$. Potom tah

$$(v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, \ldots, v_{m-1}, e_m, v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k, e, v')$$

má délku $m + 1$ a to je ve sporu s maximalitou T. Platí tedy $V = V'$. Dále pro spor předpokládejme $E \neq E'$. Mějme hranu $e \in E \setminus E'$, kde $e = \{v_k, v_\ell\}$. Potom tah

$$(v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, \ldots, v_{m-1}, e_m, v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k, e, v_\ell)$$

má délku $m + 1$ a to je ve sporu s maximalitou T. Platí tedy $E = E'$. To znamená, že T projde všechny hrany. V kombinaci s uzavřeností T dostáváme, že T je eulerovský tah.