Automorfismy a rozlišitelné grafy

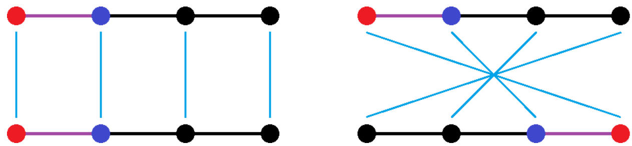
Zadání 5. úlohy v sérii je pro jeden specifický případ následující:

Mějme množinu vrcholů $\{1, 2, 3, 4\}$. Kolik je nad těmito vrcholy různých, ale vzájemně izomorfních cest P_4?

Jak vhodně přistupovat k této úloze? Začněme vysvětlením toho, co to je automorfismus.

Automorfismus

Automorfismus grafu G je izomorfní zobrazení grafu G na graf G. V případě cesty P_4 existují 2 automorfismy:



Jeden automorfismus zobrazí všechny vrcholy na sebe, což zachovává sousednost vrcholů. Druhý automorfismus otočí pořadí vrcholů - všimněme si, že pokud dva vrcholy spolu sousedili na začátku, tak se zobrazily na jiné vrcholy, které stále spolu sousedí, což splňuje definici automorfismu.

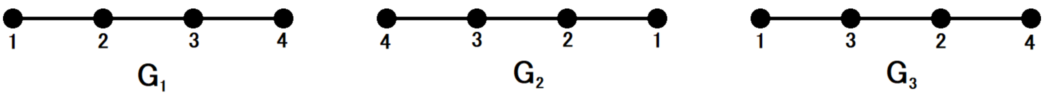
I když P_4 má dva automorfismy, neznamená to, že správná odpověď v úloze 5 je 2, což byla častá chyba.

Rozlišitelné grafy

Smyslem úlohy 5 je to, že pojmenování vrcholů hraje roli. Pro dva grafy $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ je rovnost definována jako

$$G_1 = G_2 \Leftrightarrow V_1 = V_2 \wedge E_1 = E_2$$

Různými grafy v zadání se potom rozumí grafy, které nejsou rovné. Uvažme 3 následující grafy:



Toto jsou příklady cest P_4 sestrojených nad pevně danou množinou vrcholů $\{1, 2, 3, 4\}$. Všechny tyto cesty se zdají být různé a častá špatná odpověď byla, že existuje $n!$ různých cest. Pokud se podíváme na obrázky označené G_1 a G_3, potom vidíme, že jsou různé. Graf G_3 obsahuje hranu $\{1, 3\}$, která není přítomna v grafu G_1. Platí tedy $G_3 \neq G_1$. Grafy G_1 a G_2 jsou každopádně shodné. Všimněme si, že pořadí očíslování vrcholů v G_2 je opačné, než v G_1, což se podobá druhému automorfismu na P_4. Toto není náhoda - pro automorfismus f na grafu G platí $G = f(G)$. Ze všech možných 4! způsobů, jak očíslovat 4 vrcholy vždy 2 vedou na shodný graf, což lze argumentovat existencí dvou automorfismů. Správná odpověď je tedy, že existuje 4!/2 různých grafů.