Úloha 1: Úvod do střední hodnoty

Intuitivně, jaká hodnota průměrně padá na kostce s čísli 1 až 6? Nápověda: I když kostka má jen celá čísla, průměr není celé číslo.

Určímě průměr čísel 1 až 6. Výsledek je $\frac{7}{2}$.

Nyní svou odpověď podpořte dosazením do vzorce pro střední hodnotou. Mělo by vám vyjít 6 členů které sečtete.

Hod kostkou modelujeme jako $|\Omega| = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. To, co padlo na kostce modelujeme jako $X(\omega) = \omega$.

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)X(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{6} \cdot \omega = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

Úloha 2: Linearita střední hodnoty 1
Jaká hodnota průměrně padá na kostce s čísly 1 až 4?

$\frac{5}{2}$ na základě podobné úvahy jako v cvičení 1.

(Volitelně) Házíme 2krát kostkou s čísly 1 až 4. Jak vypadá všech 16 elementárních jevů?

$$11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44$$

Jaká je střední hodnota součtu čísel, které padly na dvou kostkách?

Pokud sečteme dvojice hodů výše, dostaneme následujících 16 součtů:

$$2, 3, 4, 5, 3, 4, 5, 6, 4, 5, 6, 7, 5, 6, 7, 8$$

Průměr těchto čísel (což odpovídá střední hodnotě) je 5.

Porovnejte tuto střední hodnotu s první odpovědí. Co je na ní zajímavého?

Je dvakrát větší. Toto je důsledkem toho, že hazíme 2 kostky a také důsledkem linearity střední hodnoty. Vysvětlení je níže.

Bez výpočtu zkuste určit, jaká by byla střední hodnota, kdybychom sčítali výsledek hodu na 5 čtyřstěnných kostkách. Pokud nevíte jak na to, podívejte se na text níže.

$E[X] = E[5 \cdot X_1] = 5 \cdot E[X_1] = 5 \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{2}$
Kde X_1 je výsledek hodu na jedné kostce.

V této úloze se skrývá koncept, kterému se říká **linearita střední hodnoty**. Liearitu střední hodnoty lze formulovat jako $E[X+Y] = E[X]+E[Y]$ a $E[\alpha \cdot X] = \alpha \cdot E[X]$ pro reálné číslo α. Při určování součtu na dvou kostkách můžete uvážit X jako hodnotu, co padla na první kostce a Y jako hodnotu, co padla na druhé kostce a vypočítat $E[X + Y]$. Víc v předmětu pravděpodobnost a statistika 1.

*** Úloha 3: Nečekaná vlastnost střední hodnoty**

Mějme následující hru: Výhra začíná na hodnotě 1 kč. Následně se losuje a výhra je buď zdvojnásobena, nebo vyplacena, obojí s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Pokud výhra byla zdvojnásobena, proces losování pokračuje dál až do vyplacení.

- Jaká je pravděpodobnost, že vyhraju právě jednu korunu?
- Jaká je pravděpodobnost, že vyhraju právě 16 kč?
- Jaká je střední hodnota výhry?

Nebojte se použít intuici při vyčíslování jendoho součtu.

Nápověda: V třetím případě by měla vyjít nekonečná suma jejichž všechny členy jsou $\frac{1}{2}$. Zde je právě použita intuice o tom, co to znamená pro střední hodnotu.

Úloha 4: Nezávislost jevů 1
Mějme kostku s čísly 1 až 6. Jaké z následujících dvojic jevů jsou nezávislé?

- Padlo sudé číslo; Padla 4
  - První jev je $\{2,4,6\}$ a má pravděpodobnost $1/2$.
  - Druhý jev je $\{4\}$ a má pravděpodobnost $1/6$.
  - Součin pravděpodobností je $1/12$.
  - Průnik jevů je $\{4\}$ a má pravděpodobnost $1/6$.
  - $1/12 \neq 1/6$
  - Jevy jsou závislé na základě nerovnosti.
- Padlo sudé číslo; Padlo liché číslo
  - První jev je $\{2,4,6\}$ a má pravděpodobnost $1/2$.
  - Druhý jev je $\{1,3,5\}$ a má pravděpodobnost $1/2$.
  - Součin pravděpodobností je $1/4$.
  - Průnik jevů je $\{\}$ a má pravděpodobnost 0.
  - $1/4 \neq 0$
  - Jevy jsou závislé na základě nerovnosti.
- Padlo sudé číslo; Padla 1 nebo 2
  - První jev je $\{2,4,6\}$ a má pravděpodobnost $1/2$.
  - Druhý jev je $\{1,2\}$ a má pravděpodobnost $1/3$.
  - Součin pravděpodobností je $1/6$.
  - Průnik jevů je $\{2\}$ a má pravděpodobnost $1/6$.
  - $1/6 = 1/6$
  - Jevy jsou nezávislé na základě rovnosti.
- Padla 1 nebo 3; Padla 1 nebo 2
  - První jev je $\{1,3\}$ a má pravděpodobnost $1/3$.
  - Druhý jev je $\{1,2\}$ a má pravděpodobnost $1/3$.
  - Součin pravděpodobností je $1/9$.
  - Průnik jevů je $\{1\}$ a má pravděpodobnost $1/6$.
  - $1/9 \neq 1/6$
  - Jevy jsou závislé na základě nerovnosti.

- Padlo cokoliv; Padla 1 nebo 2
  - První jev je $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a má pravděpodobnost 1.
  - Druhý jev je $\{1, 2\}$ a má pravděpodobnost $1/3$.
  - Součin pravděpodobností je $1/3$.
  - Průnik jevů je $\{1, 2\}$ a má pravděpodobnost $1/3$.
  - $1/3 = 1/3$
  - Jevy jsou nezávislé na základě rovnosti.
- Jev $\emptyset$ s pravděpodobností 0; Padla 1 nebo 2
  - První jev je $\{\}$ a má pravděpodobnost 0.
  - Druhý jev je $\{1, 2\}$ a má pravděpodobnost $1/3$.
  - Součin pravděpodobností je 0.
  - Průnik jevů je $\{\}$ a má pravděpodobnost 0.
  - $0 = 0$
  - Jevy jsou nezávislé na základě rovnosti.

Úloha 5: Nezávislost jevů 2

Vzorec pro nezávislost jevů obsahuje členy $P(A)$, $P(B)$ a $P(A \cap B)$. Najděte dva vzorce, které využívají $P(A)$, $P(B)$, $P(A|B)$ a $P(B|A)$ a zformulujte podmínky na nenulovost členů.

Máme vzorec pro nezávislost a pro podmíněný jev:

$$P(A)P(B) = P(A \cap B)\ ;\ P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A \cap B)$ v druhém vzorci vyjádříme podle prvního vzorce

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B)}{P(B)}$$

Zjednodušíme

$$P(A|B) = P(A)$$

Tento vzorec je platný pouze pokud $P(B) \neq 0$, protože jinak není $P(A|B)$ definované. Podobně lze odvodit vzorec $P(B|A) = P(B)$ s podmínkou $P(A) \neq 0$.

Úloha 6: Bayesovo pravidlo

Pomocí vzorců pro $P(A|B)$ a $P(B|A)$ odvoďte vzorec, který obsahuje $P(A|B)$, $P(B|A)$ a zároveň neobsahuje $P(A \cap B)$. Zformulujte podmínku na nenulovost.

Máme 2 vzorece pro podmíněné jevy:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \ ; \ P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

V obou vzorcích izolujeme člen $P(A \cap B)$ tím, že každý vzorec vynásobíme jmenovatelem na levé straně. Z tohoto plynou podmínky na nenulovost: $P(A) \neq 0$ a $P(B) \neq 0$.

$$P(A|B)P(B) = P(A \cap B) \ ; \ P(B|A)P(A) = P(A \cap B)$$

Pravé strany jsou shodné. Vytovoříme jednu rovnici obsahující levé stranyL:

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

Tento vzorec už splňuje podmínky zadání. Vydělením $P(A)$ nebo $P(B)$ dostaneme běžný tvar Bayesova pravidla pro 2 jevy:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

Obě podmínky na nenulovost stále platí, už kvůli přítomnosti členů $P(A|B)$ a $P(B|A)$.

* Úloha 7: Člověče, nezlob se

Házejme kostku ve stylu “člověče, nezlob se”:

- Dokud padá 6, házíme opakovaně.
- Jakmile padne 1 až 5, házení končí.
- Výsledek hodu je součet hozených čísel.

Určete střední hodnotu výsledku hodu. Protože možných výsledků je nekonečně mnoho, je třeba najít vhodný trik pro vyjádření $E[X]$. Zkuste napsat prvních 11, případně 16 členů součtu, pokud vás trik nenapadá.

Nápověda: máme následující nekonečné součty:

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+ \quad \frac{7}{36}+\frac{8}{36}+\frac{9}{36}+\frac{10}{36}+\frac{11}{36}+\frac{13}{216}+\dots \\
a\cdot E[X]+b &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \frac{7}{36}+\frac{8}{36}+\frac{9}{36}+\frac{10}{36}+\frac{11}{36}+\frac{13}{216}+\dots
\end{aligned}
$$

Druhý nekonečný součet lze vyjádřit v lineární závislosti na prvním. Pokud nevíte, zkuste učit koeficienty pro konečnou část:

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{6}+\frac{2}{6} \\
a\cdot S+b &= \frac{7}{36}+\frac{8}{36}
\end{aligned}
$$

I když existuje nekonečně mnoho způsobů jak určit koeficienty, jeden dává více smyslu, protože se odvodí přenásobením členů stejným číslem a odečtením stejné části od všech členů. Vhodně zvolené koeficienty přímo souvisí s hodnotami na kostce.

*** Úloha 8: Linearita střední hodnoty 2**

Mějme náhodnou posloupnost 100 čísel, kde všechna čísla jsou 0 nebo 1, každé s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ nezávisle. Jaká je střední hodnota počtu šestic jedniček v posloupnosti? Delší posloupnosti počítejte tak, že počítáte všechny souvislé šestice v nich. Posloupnost osmi jedniček má 3 šestice. Nápověda: Využijte linearitu střední hodnoty z úlohy 2.

Nápověda, která je součástí zadání pomůže hodně. Tato úloha je lehčí, než může na první pohled vypadat. Narozdíl od úlohy 7 nevyžaduje žádné speciální triky.