**Úloha 1: Základy**

Odpovězte na následující otázky pomocí zlomku. Lze si pomoci vypsáním všech případů.

- Jaká je pravděpodobnost, že na kostce s čísly 1 až 6 padne číslo 5? $\frac{1}{6}$
- Jaká je pravděpodobnost, že na kostce s čísly 1 až 6 padne sudé číslo? $\frac{3}{6}$
- Házíme 3krát za sebou mincí. Jaká je pravděpodobnost, že dva hody za sebou padne mince na stejnou stranu?

$$\begin{aligned} \text{Příznivé případy: } & HHH, HHT, HTT, TTT, TTH, THH \\ \text{Nepříznivé případy: } & HTH, THT \\ \text{Výsledek: } & \frac{6}{8} \end{aligned}$$

- Házíme 2 kostky. Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne stejné číslo?

$$\begin{aligned} \text{Příznivé případy: } & 11, 22, 33, 44, 55, 66 \\ \text{Nepříznivé případy: } & 12, 13, 14, 15, 16, 21, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 34, 35, 36 \\ & 41, 42, 43, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 56, 61, 62, 63, 64, 65 \\ \text{Výsledek: } & \frac{6}{36} \end{aligned}$$

Alternativně lze vyřešit úvahou, že ať padne na první kostce cokoliv, na druhé musí padnout něco specifického a na to je vždy pravděpodobnost 1/6.

**Úloha 2: PIE a pravděpodobnost**

Poznatky z kombinatorického počítání lze využít při počítání pravděpodobnosti. Uvažme hod třemi kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že na alespoň jedné padne číslo 6? Zkuste použít princip inkluze a exkluze.

- Množina A: na první kostce padla 6.
- Množina B: na druhé kostce padla 6.
- Množina C: na třetí kostce padla 6.

Množina $A \cup B \cup C$ potom bude odpovídat případům, kdy alespoň na jedné kostce padla 6.

Při hodu třemi kostkami je $6^3 = 216 = |\Omega|$ možností, jak může hod dopadnout. Uvažme jev $A$.

Na první kostce padla nutně 6 (1 možnost), na druhé kostce padlo cokoliv (6 možností) a na třetí kostce padlo cokoliv (6 možností). Platí tedy $|A| = 1 \cdot 6 \cdot 6 = 36$.

Podobně lze odvodit

- $|B| = 6 \cdot 1 \cdot 6 = 36$
- $|C| = 6 \cdot 6 \cdot 1 = 36$
- $|A \cap B| = 1 \cdot 1 \cdot 6 = 6$
- $|B \cap C| = 6 \cdot 1 \cdot 1 = 6$
- $|A \cap C| = 1 \cdot 6 \cdot 1 = 6$
- $|A \cap B \cap C| = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

Rozbor nemusí být tak podrbný. Podobné jevy jako průniky dvou případů lze řešit dohromady. Z PIE potom plyne

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$
$$|A \cup B \cup C| = 36 + 36 + 36 - 6 - 6 - 6 + 1$$
$$|A \cup B \cup C| = 91$$

Pravděpodobnost jevu $|A \cup B \cup C|$ je $\frac{|A \cup B \cup C|}{|\Omega|} = \frac{91}{216}$.

## Úloha 3: Geometrické rozdělení

Dva hráči hrají kámen-nůžky-papír a oba hráči a svůj tah volí s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ nezávisle.

- Jaká je pravděpodobnost, že dané kolo skončí remízou?

  Z podobného argumentu jako pro pravděpodobnost stejných dvou čísel na kostkách, je pravděpodobnost, že oba hráči vyberou to samé, když mají 3 možnosti, rovna $\frac{1}{3}$.

- Jaká je pravděpodobnost, že jeden z hráčů v daném kole vyhraje?

  Výhra libovolného hráče znamená, že nenastala remíza. Jedná se o opačný jev k remíze. Pravděpodobnost remízy je $\frac{1}{3}$. Pravděpodobnost, že remíza nenastane je $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

- Jaká je pravděpodobnost, že 3 kola za sebou skončí remízou a potom vyhraje jeden z hráčů?

  $$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{81}$$

  Obecně, na to, že při opakování něčeho (např hodu kostky, nebo hry kámen nůžky papír) nastane jev $A_1$, potom jev $A_2$ a tak dále až do jevu $A_n$, je pravděpodobnost $P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$. V tomto případě jsme uvažovali sekvenci 4 jevů remíza, remíza, remíza, výhra libovolného hráče.

- Jaká je pravděpodobnost, že $n \in \mathbb{N}_0$ kol za sebou skončí remízou a potom vyhraje jeden z hráčů?

  $$\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{81}$$

*** Úloha 4: Narozeninový paradox**

Uvažujme, že máme v místnosti $n$ lidí. Všichni lidé se narodili v den, který není 29. Února. Rozložení datumu narození je uniformní, tedy všechny dny nastávají s pravděpodobností 1/365. Jaká je pravděpodobnost, že 2 lidé sdílí narozeniny, pokud $n = 23$? Vyjádřete exaktně vzorcem a volitelně (s pomocí kalkulačky, nebo znalosti problému) jako desetinné číslo.

Nápověda: Je snažší určit pravděpodobnost opačného jevu, tedy že nikdo nesdílí narozeniny a výsledek odečíst od 1. Pravděpodobnost, že nikdo nesdílí narozeniny by měla vyjít 0 pro $n = 366$ a nenulová pro $n = 365$.

**Úloha 5: Míče a koše 1**

Máme 10 míčů a ty náhodně vložíme do 6 košů. Každý míč byl vložen do daného koše s pravděpodobností $\frac{1}{6}$ nezávisle na ostatních. Míče i koše jsou očíslované.

- (Kombinatorický problém) Jaký je počet možností, jak může vypadat rozdělení očíslovaných míčů do očíslovaných košů?

  Jedná se o počet variací s opakováním. Počet možností je tedy $6^{10}$, protože pro každý z 10 míčů máme 6 možností, jak přiřadit koš.

- (Kombinatorický problém) Jaký je počet možností, jak může vypadat rozdělení očíslovaných míčů do očíslovaných košů, pokud koš číslo 1 je prázdný?

  Opět lze řešit jako počet variací s opakováním. Počet možností je $5^{10}$, protože pro každý z 10 míčů máme pouze 5 možností, jak přiřadit koš.

- Jaká je pravděpodobnost, že koš číslo 1 je prázdný?

  Z prvního bodu máme $|\Omega| = 6^{10}$, a z druhého bodu máme $|A| = 5^{10}$. Výsledek je $P(A) = \frac{5^{10}}{6^{10}}$

*** Úloha 6: Míče a koše 2**

Zádání viz úloha 5. Jaká je pravděpodobnost, že koš číslo 1 obsahuje alespoň 3 míče?

Nápověda: Kombinatoricky počítáme, kolik existuje možností, jak umístit 3, 4, 5, …10 míčů do 1. koše a zbytek rozdělit do ostatních. Alternativně lze vypočítat pro 0, 1, 2 míčů v prvním koši a odečíst od celkového počtu.

**Úloha 7: Základy podmíněné pravděpodobnosti**

Máme 12 kartiček s trojcifernými čísly. Tato čísla jsou:

$$\{125, 189, 252, 281, 297, 331, 387, 415, 463, 492, 517, 550\}$$

Určete následující pravděpodobnosti:

- Vytáhneme náhodnou kartičku. Jaká je pravděpodobnost, že držíme kartičku s číslem větším než 270?

$$\begin{aligned} \text{Příznivé případy: } & 281, 297, 331, 387, 415, 463, 492, 517, 550 \\ \text{Nepříznivé případy: } & 125, 189, 252 \\ \text{Výsledek: } & \frac{9}{12} \end{aligned}$$

- Podíváme se na první cifru. Tato cifra je 2. Jaká je nyní pravděpodobnost, že držíme kartičku s číslem větším než 270?

$$\begin{aligned} \text{Příznivé případy: } & 281, 297 \\ \text{Nepříznivé případy: } & 252 \\ \text{Výsledek: } & \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- První dvě cifry jsou 2 a 5. Jaká je nyní pravděpodobnost, že držíme kartičku s číslem větším než 270?

$$\begin{aligned} \text{Příznivé případy: } & \text{žádné} \\ \text{Nepříznivé případy: } & 252 \\ \text{Výsledek: } & \frac{0}{1} \end{aligned}$$

**Úloha 8: Součty na kostkách**

Házíme 3krát kostkou.

- Jaká je pravděpodobnost, že v prvním hodu padlo číslo 1? A co číslo 2?

  Obě pravděpodobnosti jsou $\frac{1}{6}$.

- (Kombinatorický problém) Součet na kostkách je 7. Zkuste vypsat všechny případy, jak dosáhnou 7 pomocí třech hodů.

  Je vhodné postupovat strategicky, např volbou nízkých čísel v dřívějších hodech. Potom, co zvolíme hodnotu 1. a 2. hodu by měla hodnota 3. hodu být určena jednoznačně, nebo by neměla žádná vhodná hodnota existovat:

$$115, 124, 133, 142, 151, 214, 223, 232, 241, 313, 322, 331, 412, 421, 511$$

- Součet na kostkách je 7. Jaká je pravděpodobnost, že v prvním hodu padlo číslo 1? A co číslo 2?

  Použijeme podmíněnou pravděpodobnost jako doposud:

$$\begin{aligned} \text{Příznivé případy pro 1: } & 115, 124, 133, 142, 151 \\ \text{Nepříznivé případy pro 1: } & 214, 223, 232, 241, 313, 322, 331, 412, 421, 511 \\ \text{Výsledek pro 1: } & \frac{5}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Příznivé případy pro 2: } & 214, 223, 232, 241 \\ \text{Nepříznivé případy pro 2: } & 115, 124, 133, 142, 151, 313, 322, 331, 412, 421, 511 \\ \text{Výsledek pro 2: } & \frac{4}{15} \end{aligned}$$

*** Úloha 9: Problém Montyho Halla**

Jste v soutěžním pořadu a máte šanci vyhrát auto. Před vámi jsou 3 dveře, dvoje dveře za sebou skrývají kozu a jedny dveře skrývají auto. Hra probíhá následovně: Vyberete dveře. Moderátor otevře dveře, které jste nevybrali a za kterými je koza. Nyní, když jsou zavřené jen 2 dveře včetně vámi vybraných, máte možnost odpověď změnit. Jaká je pravděpodobnost, že vyhrajete auto, když volbu změníte? Podepřete svou odpověď výpočtem, nebo diagramem možností průběhu.

Nápověda: Předpokládejme, že jsme zvolili auto na začátku. Co bude zvolená věc na konci? Nyní předpokládejme, že jsme zvolili kozu na začátku. Co bude zvolená věc na konci?