Řešení úlohy 5
Mezi relace popisující vztah množin A a B doplňte platné implikace ($\Leftarrow$ nebo $\Rightarrow$). Pokud platí obě implikace, doplňte ekvivalenci ($\Leftrightarrow$). Pokud žádná implikace neplatí, doplňte otazník (?).

$$A \cap B = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad A \setminus B = A$$
$$A \cap B = \emptyset \quad ? \quad A \subseteq B$$
$$A \cap B = \emptyset \quad ? \quad A \cup B = B$$
$$A \cap B = \emptyset \quad ? \quad A = B$$
$$A \cup B = B \quad \Leftarrow \quad A = B$$

$$A \setminus B = A \quad ? \quad A \subseteq B$$
$$A \setminus B = A \quad ? \quad A \cup B = B$$
$$A \setminus B = A \quad ? \quad A = B$$
$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B = B$$
$$A \subseteq B \quad \Leftarrow \quad A = B$$

Vysvětlení
Kdyby výrazy navíc využívaly logické spojky nebo nerovnosti, řešení by nebylo tak snadné. Ale pro výrazy využívající běžné množinové operace, rovnosti a inkluze stačí určit, jaké části Vennova diagramu množin A a B musí být prázdné.

Vnitřek Vennova Diagramu lze rozložit na 3 disjunktní části:

1. $A \setminus B$ - Prvky, které leží v A a neleží v B.
2. $A \cap B$ - Prvky, které leží v A i v B.
3. $B \setminus A$ - Prvky, které leží v B a neleží v A.

Všimněme si, že ostatní části množin lze napsat jako sjednocení těchto částí:

- $\emptyset$ lze interpretovat jako sjednocení 0 množin.
- $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.
- $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$.
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$.

Dále si všimněme, že žádný prvek nemůže ležet ve dvou částech zároveň. Uvažme výraz typu $A \setminus B = A \cap B$. Kdyby $A \setminus B$ obsahovala prvek x, potom z rovnosti musí prvek x ležet i v $A \cap B$. Toto není možné protože x by muselo ležet a zároveň neležet v B. Jediný případ, kdy platí $A \setminus B = A \cap B$, je pokud jsou obě tyto části prázdné.

Nyní pro jednotlivé výrazy určíme, jaké části musí být prázdné.

- $A \cap B = \emptyset$: Zřejmě 2. část musí být prázdná.
- $A \setminus B = A$: Výraz přepíšeme pomocí sjednocení relevantních částí:

  $$(A \setminus B) = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$

  Aby tato rovnost platila, $(A \cap B)$ musí být prázdné, tedy 2. část musí být prázdná.
- $A \subseteq B$: Každý prvek, který leží v A, musí ležet v B. Tedy nesmí existovat prvek, který leží v A a neleží v B. Jinak řečeno, 1. část musí být prázdná.

- $A \cup B = B$: Výraz přepíšeme pomocí sjednocení relevantních částí:

$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

  Na levé straně je navíc $(A \setminus B)$. Tato část musí být prázdná, aby rovnost platila. Tedy, 1. část musí být prázdná.

- $A = B$: Výraz přepíšeme pomocí sjednocení relevantních částí:

$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

  Výrazy, které se nachází na jedné straně rovnice a nenachází se na druhé straně rovnice jsou $(A \setminus B)$ a $(B \setminus A)$. Aby rovnost mohla platit, tyto množiny musí být prázdné. Jinými slovy, 1. a 3. část jsou prázdné.

Pro shrnutí

1. $A \cap B = \emptyset$: **2.** část musí být prázdná.
2. $A \setminus B = A$: **2.** část musí být prázdná.
3. $A \subseteq B$: **1.** část musí být prázdná.
4. $A \cup B = B$: **1.** část musí být prázdná.
5. $A = B$: **1.** a **3.** část musí být prázdné.

Při doplňování implikací se řídíme následovně:

- Pokud jsou podmínky stejné, doplníme ekvivalenci. (Platí pro dvojice případů (1, 2) a (3, 4)výše)
- Pokud je podmínka u nějakého případu striktnější verzí jiné podmínky, doplníme implikaci ukazující od striktnější podmínky k volnější podmínce. (Např. Prázdnota části 1 a 3 zároveň je striktnější podmínka, než prázdnota části 1. Doplníme tedy implikace od případu 5 do případů 3 a 4).
- Jinak nelze vyvodit žádnou implikaci. (V tomto případě se jedná o ty dvojice případů, kde jeden vyžaduje, že část 1 je prázdná a druhý vyžaduje, že část 2 je prázdná.)