Řešení úlohy 5

Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$.

První dvě stránky obsahují rozepsaný důkaz podle struktury v cvičení 5. Poslední stránka obsahuje praktický důkaz.

Začneme dosazením $n = 1$ do tvrzení a ověřením platnosti $V(1)$:

$$\text{Levá strana: } \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{1} k = 1$$

$$\text{Pravá strana: } \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = 1$$

Nyní dosaíme n a $(n+1)$ do tvrzení, abychom dostali tvrzení $V(n)$ a $V(n+1)$. Jelikož v prvním případě dosazujeme n za n, tvrzení stačí opsat.

$$\text{V(n): } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\text{V(n+1): } \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

Všimneme si, že po dosazení vypadají tvrzení podobně. Nyní přepíšeme levou stranu $V(n+1)$ tak, aby měla tvar “levá strana $V(n)$ plus něco”.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

Výraz jsme upravili tak, že jsme ze sumy na levé staně odebrali člen na $(n+1)$-ní pozici. Protože výraz v sumě je k, člen na $(n+1)$-ní pozici je $(n+1)$. Kdyby výraz v sumě byl např. $(2k-1)$, potom člen na $(n+1)$-ní pozici by byl $(2(n+1)-1)$.

Využijeme platnosti indukčního předpokladu. Výraz “levá strana $V(n)$ plus něco” je rovný “pravá strana $V(n)$ plus něco ”.

$$\sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1)$$

Konečně, dokážeme to, že "pravá strana $V(n)$ plus něco " se rovná pravé straně $V(n+1)$.

$$\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1) = \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+n+1$$
$$= \frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$$

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)(n+2)$$
$$= \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+n+1$$
$$= \frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$$

Celý důkaz v praxi

- $V(1)$:
  - Levá strana:
  $$\sum_{k=1}^{1} k = 1$$
  - Pravá strana:
  $$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 + 1) = 1$$
- $V(n) \Rightarrow V(n+1)$:
  - Předpokládáme
  $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$$
  - Chceme ukázat
  $$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$
  - Levá strana:
  $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\ &= \frac{1}{2} n(n+1) + (n+1) \\ &= \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n + n + 1 \\ &= \frac{1}{2} n^2 + \frac{3}{2} n + 1 \end{aligned}$$
  - Pravá strana:
  $$\begin{aligned} \frac{1}{2}(n+1)(n+2) &= \left(\frac{1}{2} n + \frac{1}{2}\right)(n+2) \\ &= \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n + n + 1 \\ &= \frac{1}{2} n^2 + \frac{3}{2} n + 1 \end{aligned}$$