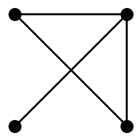
Cvičení 9 - Grafy 2 (2.12.2024)

Skóre grafu

Mějme graf na vrcholech $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. **Skóre** tohoto grafu je následující uspořádaná n-tice:

$$(deg(v_1), deg(v_2), \ldots, deg(v_n))$$

Skóre jsou považovaná za stejná, pokud mají stejné prvky nezávisle na pořadí. Většinou se skóre zapisuje tak, aby byly čísla v něm seřazena od nejmenšího po největší.



Příklad: Graf na obrázku má skóre (1,2,2,3).

Princip sudosti

Princip sudosti říká, že součet stupňů vrcholů v grafu je sudý (a rovný 2-násobku počtu hran). Formálně

$$2|E| = \sum_{v \in V} deg(v)$$

Cesta, Tah, Sled

Sled je posloupnost vrcholů a hran grafu G, tvaru $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{t-1}, e_t, v_t)$ taková, že mezi dvojicemi vrcholů $(2t+1)$-tice je hrana, která tyto vrcholy spojuje. Délka tohoto sledu je t.

- **Tah** je sled, ve kterém se neopakují hrany.
- **Cesta** je sled, ve kterém se neopakují vrcholy. (Z čehož plyne, že se neopakují ani hrany.)

Věta o počtu sledů

Nechť G je graf s vrcholy $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a A je matice sousednosti G. Potom počet sledů délky k z vrcholu v_i do vrcholu v_j je $(A^k)_{i,j}$, kde A^k je k-tá mocnina matice A.

Eulerovský graf

Tah je **eulerovský**, pokud pokryje všechny hrany grafu. **Tah** je **uzavřený**, pokud počáteční vrchol je shodný s koncovým vrcholem. **Graf** je **eulerovský**, pokud v něm existuje uzavřený eulerovský tah.

Ekvivalentní formulace eulerovského grafu
(Věta z přednášky) Graf je eulerovský, právě tehdy pokud je souvislý a stupně všech jeho vrcholů jsou sudé.

Úloha 1: Stejná skóre neimplikují izomorfismus
Najděte dvojici grafů, které mají stejné skóre a nejsou izomorfní. Alespoň jeden z grafů bude muset mít více komponent souvislosti.

Úloha 2: Most
Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu takovou, jejíž odebráním se graf stane nesouvislým.

*** Úloha 3: Regulární graf**
Pro všechna přiriozená k a n splňující $k < n$ a $2|kn$ najděte k-regulární graf na n vrcholech.

Úloha 4: Eulerovké tahy
Charakterizujte všechny grafy, ve kterých existuje ne nutně uzavřený eulerovský tah.

Úloha 5: Hyperkrychle
Graf hyperkrychle je graf, jehož vrcholy jsou ozačené uspořádanými d-ticemi skládajícími se z nul a jedniček. Dva vrcholy jsou spojené hranou právě tehdy, když se označení vrcholů liší právě v jedné složce. Pro jaké d je hyperkrychle eulerovský graf?

* Úloha 6: Ekvivalentní definice eulerovskosti 1
Dokažte, že každý eulerovský graf je hranově disjunktním sjednocením kružnic.

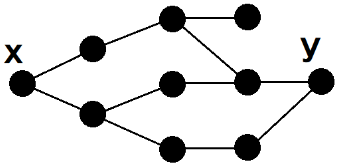
Úloha 7: Ekvivalentní definice eulerovskosti 2
Dokažte pro orientovaný graf G, že následující je ekvivalentní

1. G má uzavřený eulerovský orientovaný tah.
2. G je silně souvislý a vstupní stupeň každého vrcholu je roven výstupnímu stupni.
3. G je slabě souvislý a vstupní stupeň každého vrcholu je roven výstupnímu stupni.

Nápověda: Důkaz je podobný důkazu pro neorientované grafy.

Úloha 8: Počet cest 1

Spočítejte počet cest délky 4 mezi vrcholy x a y v následujícím grafu. Zkuste najít intuitivní postup řešení bez použití věty o počtu sledů.



Úloha 9: Počet cest 2

Nechť G je graf bez trojúhelníků a A je jeho matice sousednosti. Jaké prvky jsou na hlavní diagonále A^3?

* Úloha 10: Počet cest 3

Na základě předchozích dvou úloh navrhněte algoritmus, který iterativním mocněním matice sousednosti zjistí délku nejkratší cesty mezi dvojicí vrcholů a kolik různých nejkratších cest mezi těmito vrcholy existuje. Dále vysvětlete, proč nelze pomocí tohoto algoritmu správně spočítat počet delších cest specifické délky.