

Definice grafu

Graf je dvojice $G = (V, E)$, kde V je množina a $E \subseteq \binom{V}{2}$, neboli, každá hrana je reprezentována množinou dvou různých vrcholů.

Grafový izomorfismus

Mějme dva grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$. Grafovým **izomorfismem** nazveme bijekci $f : V \rightarrow V'$ takovou, pro kterou platí $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E'$. Pokud pro grafy G a G' existuje izomorfismus, řekneme, že jsou **izomorfní**.

Podgraf

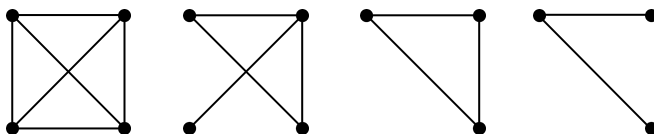
Graf $G' = (V', E')$ je **podgrafem** grafu $G = (V, E)$, pokud $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$. Graf $G' = (V', E')$ je **indukovaným podgrafem** grafu $G = (V, E)$, pokud navíc platí $E' = E \cap \binom{V'}{2}$, tedy pokud jsou v G' zachovány dva vrcholy mezi kterými v původním grafu G byla hrana, potom tato hrana je nutně zachovaná i v G' . V obecném podgrafu může tato hrana být vypuštěna.

Bipartitní graf

Graf $G = (V, E)$ je bipartitní, pokud množinu vrcholů lze rozložit na $V_1 \cup V_2$ tak, že všechny hrany spojují vrchol z V_1 s vrcholem z V_2 .

Úloha 1: Podgrafy 1

Pro všechny dvojice následujících 4 grafů určete, jaký z grafů je podgrafem toho druhého a zda se jedná o indukovaný podgraf.

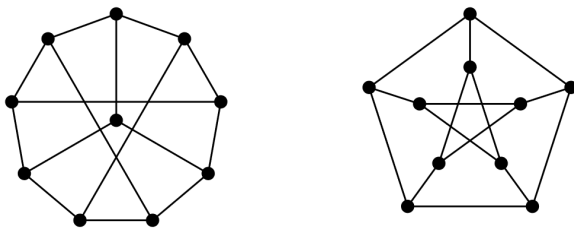


Úloha 2: Podgrafy 2

Jaké jsou vlastnosti relace “být podgrafem” a “být indukovaným podgrafem”? Určete, zda se jedná o reflexivní, symetrické, slabě antisymetrické a tranzitivní relace.

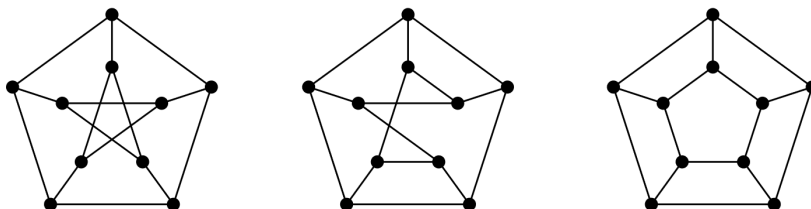
Úloha 3: Grafové izomorfismy 1

Nalezněte izomorfismus grafů na obrázku.



Úloha 4: Neizomorfní grafy

Ukažte, že žádné dva grafy na obrázku nejsou izomorfní.



* Úloha 5: Grafové izomorfismy 2

Mějme množinu vrcholů $\{1, \dots, n\}$. Kolik je nad těmito vrcholy různých, ale vzájemně izomorfních ...

- Úplných grafů K_n .
- Cest P_n .
- Kružnic C_n .
- Úplných bipartitních grafů $K_{k, n-k}$.
- Disjunktích sjednocení grafů K_k a K_{n-k} .
- Grafů, v nichž každý vrchol má stupeň 1?

Poznámka: **Body** budou uděleny za vyřešení 4 případů ze 6.

Úloha 6: Bipartitní grafy 1

Pro jaká n jsou následující grafy bipartitní?

- Cesta P_n .
- Kružnice C_n .
- Úplný graf K_n .

Úloha 7: Bipartitní grafy 2

Existuje bipartitní graf s alespoň 5 vrcholy, jehož doplněk je také bipartitní?

** Úloha 8: Grafové izomorfismy 3

Pro každé n sestrojte graf, který má přesně n automorfismů, tedy izomorfismů zobrazujících daný graf sám na sebe.

* Úloha 9: Zakázané podgrafy

Charakterizujte všechny grafy, které . . .

- neobsahují cestu délky 2 jako podgraf.
- neobsahují cestu délky 3 jako podgraf.