Nezávislé jevy

O dvou jevech A, B řekneme, že jsou nezávislé, pokud platí:

$$P(A)P(B) = P(A \cap B)$$

Podmíněná pravděpodobnost

Mějme dva jevy A, B ve stejném pravděpodobnostním prostoru. Nechť $P(B) \neq 0$. Pravděpodobnost, že nastal jev A, když víme, že nastal jev B je

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Příklad: Jev A je, že na kostce padla 4. Jev B je, že na kostce padlo sudé číslo. Přesvědčte se, že $P(A) = \frac{1}{6}$ a $P(A|B) = \frac{1}{3}$.

Náhodná veličina

Náhodná veličina je funkce X, která elementárním jevům přiřadí číselnou hodnotu.

Například když házíme 3krát mincí, můžeme počítat kolikrát nám padlo H. Potom:

$$X(TTH) = 1,\ X(HHH) = 3,\ X(THT) = 1,\ \ldots$$

Nebo můžeme pracovat s číslem, které padlo na kostce:

$$X(1) = 1,\ X(2) = 2,\ X(3) = 3, X(4) = 4,\ X(5) = 5,\ X(6) = 6$$

Nebo můžeme uvažovat, jestli číslo, které padlo na kostce je liché a pokud ano, přiřadit hodnotu 1, jinak 0:

$$X(1) = 1,\ X(2) = 0,\ X(3) = 1,\ X(4) = 0,\ X(5) = 1,\ X(6) = 0$$

Střední hodnota

Nechť X je náhodná veličina. Střední hodnota je definovaná jako:

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega)X(\omega)$$

Intuitivně, střední hodnota je průměrná hodnota veličiny X, pokud opakujeme experiment který měříme (např. hod kostkou). Koncept střední hodnoty bude lépe pochopitelný na základě následujících úloh.

Úloha 1: Úvod do střední hodnoty
Intuitivně, jaká hodnota průměrně padá na kostce s čísli 1 až 6? Nápověda: I když kostka má jen celá čísla, průměr není celé číslo.

Nyní svou odpověď podpořte dosazením do vzorce pro střední hodnotou. Mělo by vám vyjít 6 členů které sečtete.

Úloha 2: Linearita střední hodnoty 1
Jaká hodnota průměrně padá na kostce s čísly 1 až 4?

(Volitelně) Házíme 2krát kostkou s čísly 1 až 4. Jak vypadá všech 16 elementárních jevů?

Jaká je střední hodnota součtu čísel, které padly na dvou kostkách?

Porovnejte tuto střední hodnotu s první odpovědí. Co je na ní zajímavého?

Bez výpočtu zkuste určit, jaká by byla střední hodnota, kdybychom sčítali výsledek hodu na 5 čtyřstěnných kostkách. Pokud nevíte jak na to, podívejte se na text níže.

V této úloze se skrývá koncept, kterému se říká **linearita střední hodnoty**. Liearitu střední hodnoty lze formulovat jako $E[X+Y] = E[X]+E[Y]$ a $E[\alpha \cdot X] = \alpha \cdot E[X]$ pro reálné číslo α. Při určování součtu na dvou kostkách můžete uvážit X jako hodnotu, co padla na první kostce a Y jako hodnotu, co padla na druhé kostce a vypočítat $E[X+Y]$. Víc v předmětu pravděpodobnost a statistika 1.

*** Úloha 3: Nečekaná vlastnost střední hodnoty**
Mějme následující hru: Výhra začíná na hodnotě 1 kč. Následně se losuje a výhra je buď zdvojnásobena, nebo vyplacena, obojí s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Pokud výhra byla zdvojnásobena, proces losování pokračuje dál až do vyplacení.

- Jaká je pravděpodobnost, že vyhraju právě jednu korunu?
- Jaká je pravděpodobnost, že vyhraju právě 16 kč?
- Jaká je střední hodnota výhry?

Nebojte se použít intuici při vyčíslování jendoho součtu.

Úloha 4: Nezávislost jevů 1
Mějme kostku s čísly 1 až 6. Jaké z následujících dvojic jevů jsou nezávislé?

- Padlo sudé číslo; Padla 4
- Padlo sudé číslo; Padlo liché číslo
- Padlo sudé číslo; Padla 1 nebo 2
- Padla 1 nebo 3; Padla 1 nebo 2
- Padlo cokoliv; Padla 1 nebo 2
- Jev $\emptyset$ s pravděpodobností 0; Padla 1 nebo 2

Úloha 5: Nezávislost jevů 2
Vzorec pro nezávislost jevů obsahuje členy $P(A)$, $P(B)$ a $P(A \cap B)$. Najděte dva vzorce, které využívají $P(A)$, $P(B)$, $P(A|B)$ a $P(B|A)$ a zformulujte podmínky na nenulovost členů.

Úloha 6: Bayesovo pravidlo

Pomocí vzorců pro $P(A|B)$ a $P(B|A)$ odvoďte vzorec, který obsahuje $P(A|B)$, $P(B|A)$ a zároveň neobsahuje $P(A \cap B)$. Zformulujte podmínku na nenulovost.

*** Úloha 7: Člověče, nezlob se**

Házejme kostku ve stylu "člověče, nezlob se":

- Dokud padá 6, hazíme opakovaně.
- Jakmile padne 1 až 5, házení končí.
- Výsledek hodu je součet hozených čísel.

Určete střední hodnotu výsledku hodu. Protože možných výsledků je nekonečně mnoho, je třeba najít vhodný trik pro vyjádření $E[X]$. Zkuste napsat prvních 11, případně 16 členů součtu, pokud vás trik nenapadá.

*** Úloha 8: Linearita střední hodnoty 2**

Mějme náhodnou posloupnost 100 čísel, kde všechna čísla jsou 0 nebo 1, každé s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ nezávisle. Jaká je střední hodnota počtu šestic jedniček v posloupnosti? Delší posloupnosti počítejte tak, že počítáte všechny souvislé šestice v nich. Posloupnost osmi jedniček má 3 šestice. Nápověda: Využijte linearitu střední hodnoty z úlohy 2.