Značení

V cvičeních na pravděpodobnost se často mluví o házení mincí. Výsledek hodu mincí se většinou označuje H nebo T z anglického "head" a "tails". Analogicky lze použít české P nebo O (panna a orel). Pokud bude zmíněn hod mincí bez dalších specifik, budeme předpokládat, že se jedná o férovou minci, tedy že H i T padnou s pravděpodobností $\frac{1}{2}$.

V některých cvičení se mluví o hodu kostkou. Pokud nebude zmíněno jinak, jedná se o kostku s čísly 1 až 6 a všechna čísla padají s pravděpodobností $\frac{1}{6}$.

Úloha 1: Základy

Odpovězte na následující otázky pomocí zlomku. Lze si pomoci vypsáním všech případů.

- Jaká je pravděpodobnost, že na kostce s čísly 1 až 6 padne číslo 5?
- Jaká je pravděpodobnost, že na kostce s čísly 1 až 6 padne sudé číslo?
- Házíme 3krát za sebou mincí. Jaká je pravděpodobnost, že dva hody za sebou padne mince na stejnou stranu?
- Házíme 2 kostky. Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne stejné číslo?

Úloha 2: PIE a pravděpodobnost

Poznatky z kombinatorického počítání lze využít při počítání pravděpodobnosti. Uvažme hod třemi kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že na alespoň jedné padne číslo 6? Zkuste použít princip inkluze a exkluze.

Úloha 3: Geometrické rozdělení

Dva hráči hrají kámen-nůžky-papír a oba hráči a svůj tah volí s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ nezávisle.

- Jaká je pravděpodobnost, že dané kolo skončí remízou?
- Jaká je pravděpodobnost, že jeden z hráčů v daném kole vyhraje?
- Jaká je pravděpodobnost, že 3 kola za sebou skončí remízou a potom vyhraje jeden z hráčů?
- Jaká je pravděpodobnost, že $n \in \mathbb{N}_0$ kol za sebou skončí remízou a potom vyhraje jeden z hráčů?

*** Úloha 4: Narozeninový paradox**

Uvažujme, že máme v místnosti n lidí. Všichni lidé se narodili v den, který není 29. Února. Rozložení datumu narození je uniformní, tedy všechny dny nastávají s pravděpodobností 1/365. Jaká je pravděpodobnost, že 2 lidé sdílí narozeniny, pokud $n = 23$? Vyjádřete exaktně vzorcem a volitelně (s pomocí kalkulačky, nebo znalosti problému) jako desetinné číslo.

Úloha 5: Míče a koše 1
Máme 10 míčů a ty náhodně vložíme do 6 košů. Každý míč byl vložen do daného koše s pravděpodobností $\frac{1}{6}$ nezávisle na ostatních. Míče i koše jsou očíslované.

- (Kombinatorický problém) Jaký je počet možností, jak může vypadat rozdělení očíslovaných míčů do očíslovaných košů?
- (Kombinatorický problém) Jaký je počet možností, jak může vypadat rozdělení očíslovaných míčů do očíslovaných košů, pokud koš číslo 1 je prázdný?
- Jaká je pravděpodobnost, že koš číslo 1 je prázdný?

*** Úloha 6: Míče a koše 2**
Zádání viz úloha 5. Jaká je pravděpodobnost, že koš číslo 1 obsahuje alespoň 3 míče?

Úloha 7: Základy podmíněné pravděpodobnosti
Máme 12 kartiček s tříciferným čísly. Tato čísla jsou:

$$\{125, 189, 252, 281, 297, 331, 387, 415, 463, 492, 517, 550\}$$

Určete následující pravděpodobnosti:

- Vytáhneme náhodnou kartičku. Jaká je pravděpodobnost, že držíme kartičku s číslem větším než 270?
- Podíváme se na první cifru. Tato cifra je 2. Jaká je nyní pravděpodobnost, že držíme kartičku s číslem větším než 270?
- První dvě cifry jsou 2 a 5. Jaká je nyní pravděpodobnost, že držíme kartičku s číslem větším než 270?

Podmíněná pravděpodobnost obecně

Podívejme se na případ 1 v úloze 7. V tomto případě jsme počítali pravděpodobnost jevu $A = \{281, 297, 331, 387, 415, 463, 492, 517, 550\}$ v pravděpodobnostním prostoru s jevy $\Omega = \{125, 189, 252, 281, 297, 331, 387, 415, 463, 492, 517, 550\}$. Následně jsme v případu 2 uvažovali, že nastal jeden z jevů $B = \{252, 281, 297\}$ a počítali jsme pravděpodobnost jevu A, který byl omezen na tyto 3 případy. Výsledek, který vyšel by měl být konsistentní se vzorcem:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Kde $P(A|B)$ vyjadřuje právě pravděpodobnost A, pokud víme, že nastalo B. Vzorec výše lze využít v dalších úlohách na podmíněnou pravděpodobnost.

Úloha 8: Součty na kostkách

Házíme 3krát kostkou.

- Jaká je pravděpodobnost, že v prvním hodu padlo číslo 1? A co číslo 2?
- (Kombinatorický problém) Součet na kostkách je 7. Zkuste vypsat všechny případy, jak dosáhnou 7 pomocí třech hodů.
- Součet na kostkách je 7. Jaká je pravděpodobnost, že v prvním hodu padlo číslo 1? A co číslo 2?

*** Úloha 9: Problém Montyho Halla**

Jste v soutěžním pořadu a máte šanci vyhrát auto. Před vámi jsou 3 dveře, dvoje dveře za sebou skrývají kozu a jedny dveře skrývají auto. Hra probíhá následovně: Vyberete dveře. Moderátor otevře dveře, které jste nevybrali a za kterými je koza. Nyní, když jsou zavřené jen 2 dveře včetně vámi vybraných, máte možnost odpověď změnit. Jaká je pravděpodobnost, že vyhrajete auto, když volbu změníte? Podepřete svou odpověď výpočtem, nebo diagramem možností průběhu.