
Úloha 1: Základy
Určete počty následujících objektů. Pokud nevíte, lze si pomoct vypsáním všech možností.

- Kolik tříciferných čísel lze poskládat pomocí cifer 1, 2, 3, a 4?

- Kolik tříciferných čísel lze poskládat pomocí cifer 1, 2, 3, a 4 s tím, že se cifry neopakují?

- Kolik dvouprvkových podmnožin má množina $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Úloha 2: Základy obecně
Máme kuličky v n různých barvách a vybíráme k z nich. Kolika způsoby lze výběr provést za následujících podmínek? (Můžete využít kombinační čísla i faktoriály)

- Barvy se mohou opakovat a rozlišujeme pořadí výběru.
  (Variace s opakováním)

- Barvy se nesmí opakovat a rozlišujeme pořadí výběru a $k \leq n$.
  (Variace bez opakování)

- Barvy se mohou opakovat a nerozlišujeme pořadí výběru.
  (Kombinace s opakováním)

- Barvy se nesmí opakovat a nerozlišujeme pořadí výběru a $k \leq n$.
  (Kombinace bez opakování)

*** Úloha 3: Složitější výpočet**
Máme kuličky v 5 barvách. Od všech barev jich máme hodně, až na zelené kuličky, které máme pouze 3. Vybíráme skupinu 7 kuliček, na pořadí nezáleží. Kolika způsoby to lze provést? Není nutné odpovdět konkrétním číslem, stačí vzorec.

Úloha 4: Permutace s opakováním
Kolik slov (i nesmyslných) lze poskládat permutací písmen slova MISSISSIPPI?

Úloha 5: Princip inkluze a exkluze 1
(Úloha převzata z druhého cvičení) Pro množiny A, B a C platí:

$$|A| = 6;\ |B| = 4;\ |C| = 5;$$

$$|A \cap B| = 3;\ |B \cap C| = 1;\ |A \cap C| = 3;\ |A \cap B \cap C| = 1;$$

Kolik prvků obsahuje $A \cup B \cup C$? Nápověda: Množiny jsou relativně malé, zkuste zkonstruovat příklad množin A, B a C, nejlépe s použitím Vennova diagramu.

Úloha 6: Princip inkluze a exkluze 2

Kolik čísel od 1 do 120 nejsou dělitelné 6 ani 8?

*** Úloha 7: Další rozmisťování kuliček**

Máme kuličky pěti barev. Kolika způsoby je lze rozmístit do řady po pěti tak, že jsou splněny následující 2 podmínky? Na pořadí záleží. Stačí uvést vzorec, který vede na odpověď.

- Modrá kulička nikdy nemá zelonou kuličku jako levého souseda.
- Jsou použity nejvýše 2 červené kuličky.

Nápověda: I když jsou uvedeny pouze 2 podmínky, při použití PIE se hodí uvažovat 3 různé jevy.

Úloha 8: Kombinatorické rovnosti

Dokažte následující tvrzení, případně se přesvědčte o platnosti kombinatorickou úvahou.

Tip: Druhý případ odpovídá úloze 14 z prvního cvičení a lze v něm využít indukci podle n a tvrzení z prvního případu.

1. $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$
2. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
3. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
4. $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$
5. $\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}$
6. $\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$

*** Úloha 9: Barevná inkoustová tiskárna**

Barevná tiskárna tiskne tak, že umisťuje barevné kapky na jeden bod. K dispozici jsou barvy C (azurová, **C**yan), M (purpurová, **M**agenta), Y (žlutá, **Y**ellow) a K (černá, "**K**ey").

Kolik různých barev můžeme v jednom bodě namíchat, pokud můžeme použít 0 až 8 kapek a $C + M + Y$ je stejné jako $K + K$?