Cvičení 4 - Uspořádání a funkce (21.10.2024)

Uspořádání
O relaci R řekneme, že je uspořádání, pokud je reflexivní, tranzitivní a slabě antisymetrická.

- R je reflexivní, pokud $(\forall x \in X)[xRx]$.
- R je tranzitivní, pokud $(\forall x, y, z \in X)[xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz]$.
- R je slabě antisymetrická, pokud $(\forall x, y)[xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y]$. Jinak řečeno, pro různé x a y platí nejvýše jedno z xRy a yRx.

O uspořádání řekneme, že je lineární, pokud lze porovnat každou dvojici prvků, neboli $(\forall x, y)[xRy \vee yRx]$. Uspořádání je jinak částečné.

Příklady uspořádání na různých množinách

- $\leq$, $\geq$, $=$ na $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, ...
- $\subseteq$, $\supseteq$, na podmnožinách dané množiny.
- Relace dělitelnosti $|$ na $\mathbb{N}$.

Funkce
Funkce jedné proměnné se definují podobně jako relace, tedy podmnožina dvojic. Od funkce f očekáváme, že dané hodnotě x přiřadí nejvýše jednu hodnotu y.

V zápisu jako podmnožiny dvojic to odpovídá tomu, že každé x se vyskytne nejvýše jednou na levé straně dvojice (x, y).

Převod mezi zápisem pomocí dvojic a běžným zápisem je následovný:

$$(x, y) \in f \qquad \equiv \qquad f(x) = y$$

Pokud f prvkům z množiny A přiřazuje prvky z množiny B, píšeme $f : A \to B$. Dále řekneme, že $f : A \to B$ je

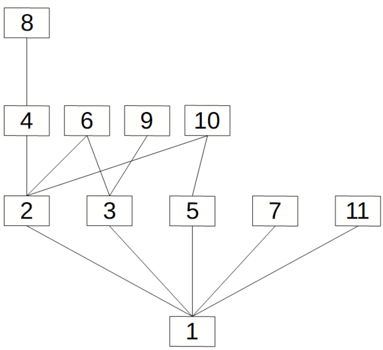
- prostá, pokud $(\forall x, w \in A)(\forall y \in B)[f(x) = y \wedge f(w) = y \Rightarrow x = w]$
- na, pokud $(\forall y \in B)(\exists x \in A)[f(x) = y]$
- bijekce, pokud je prostá a na.

Úloha 1: Lineární uspořádání
Určete, jaká z následujících uspořádání jsou lineární. Pokud nevíte, zkuste porovnat prvky v příkladu.

- $\leq$ na $\mathbb{N}$. Prvky na porovnání: $2, 3, 4, 6$
- $\subseteq$ na množinách. Prvky na porovnání: $\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}$
- $|$ na $\mathbb{N}$. Prvky na porovnání: $2, 3, 4, 6$

Úloha 2: Hasseovy diagramy 1
Jeden způsob, jak vizualizovat uspořádání je pomocí tzv. Hasseova diagramu. x a y jsou spojené, pokud xRy a zároveň neexistuje z takové, že $xRz \wedge zRy$. Níže je relace dělitelnosti pro čísla 1 až 11. Doplňte dalších libovolných 10 čísel do diagramu (vyhněte se prvočíslům). Dále nakreslete Hasseův diagram pro...

- relaci $\leq$ nad $\mathbb{Z}$ (konečnou část)
- relaci $\subseteq$ na všech osmi podmnožinách množiny $\{1, 2, 3\}$



Úloha 3: Hasseovy diagramy 2

Nakreslete Hasseův diagram libovolného uspořádání nad libovolnou množinou, které...

- Obsahuje prvek, který je maximální, ale ne největší.
- Obsahuje prvek, který je zároveň maximální a minimální.

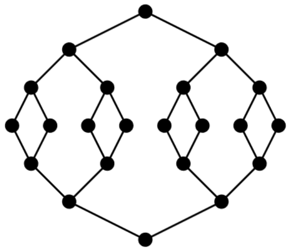
* Úloha 4: Hasseovy diagramy 3

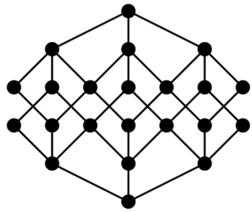
Nakreslete Hasseovy diagramy libovolnýh uspořádání, které má následující vlastnosti. V jednom případě konstrukce není možná. Dokažte proč.

- Je nekonečné, neobsahuje ani maximální, ani minimální, ani největší, ani nejmenší prvek.
- Je nekonečné, obsahuje minimální a maximální prvek a tyto dva prvky jsou navzájem různé.
- Je nekonečné, obsahuje největší a nejmenší prvek.
- Je nekonečné, obsahuje maximální a největší prvek a tyto dva prvky jsou navzájem různé.
- Je nekonečné, ale neobsahuje nekonečný řetězec.

Úloha 5: Řetězce a antiřetězce 1

V následujících částečně uspořádaných množinách vyznačte nejdelší řetězec a antiřetězc
Řetězec je skupina prvků, které jsou všechny porovnatelné. Antiřetězec je skupina prvků, kde žádná dvojice není porovnatelná.



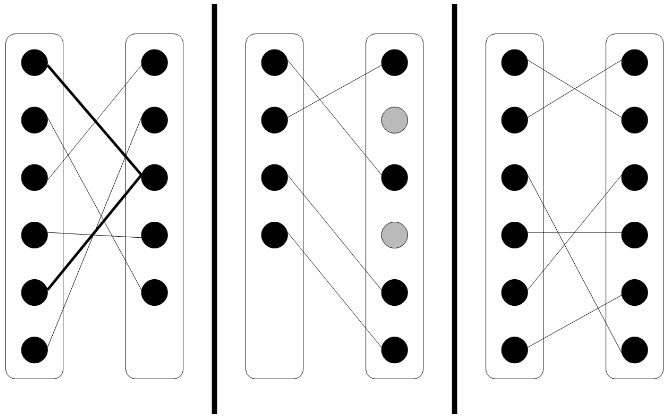


* Úloha 6: Řetězce a antiřetězce 2

Pro libovolné $k, \ell \in \mathbb{N}$ najděte největší množinu s částečným uspořádáním, jehož nejdelší řetězec má délku k a nejdelší antiřetězec má délku ℓ.

Úloha 7: Vizualizace vlastností funkcí

Pod následující obrázky doplňte “prostá”, “bijekce” a “na” podle vyobrazené situace:



Úloha 8: Vlastnosti funkcí 1

Funkce $f : A \to B$ a $g : B \to C$ jsou obě prosté. Dokažte, že i jejich složení $(g \circ f) : A \to C$ je prosté.

* Úloha 9: Vlastnosti funkcí 2

Mějme dvě funkce $f : A \to B$ a $g : B \to A$. Nechť platí $(\forall x \in A)[(g \circ f)(x) = x]$ a $(\forall y \in B)[(f \circ g)(y) = y]$. Dokažte, že obě funkce jsou bijekce.

Úloha 10: Vlastnosti funkcí 3

Nechť A je konečná množina. Dokažte, že $f : A \to A$ je prostá právě tehdy, pokud je na. Ukažte protipříklady pro nekonečné množiny.