Cvičení 3 - Relace (14.10.2024)

Úloha 1: Kartézký součin
Začněme definicí dvou množin:

$$A = \{1, 5, 8\}; B = \{1, 3\}$$

Jak vypadájí následující množiny?

$A \times B =$

$B \times A =$

$B \times B =$

Úloha 2: Relace jako podmnožina
Uvažme binární relaci R, definovanou nad množinami $\{1, 2, 3, 4\}$ a $\{5, 6, 7, 8\}$, danou výčtem prvků:

$$R = \{(1, 5), (1, 6), (2, 6), (2, 7), (3, 7), (3, 8), (4, 8)\}$$

Do výrazů na levé straně implikace doplňte "$\in$" nebo "$\notin$" podle toho, jestli daná dvojice leží v množině R. Na základě toho, co jste doplnili na levé straně doplňte "R" nebo "$\not R$" na pravé straně.

$$\begin{array}{cccccccc}
(3,6) & \notin & R & \Rightarrow & 3 & \not R & 6 \\
(1,8) & & R & \Rightarrow & 1 & & 8 \\
(2,8) & & R & \Rightarrow & 2 & & 8 \\
(2,6) & & R & \Rightarrow & 2 & & 6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccccc}
(3,7) & \in & R & \Rightarrow & 3 & R & 7 \\
(4,6) & & R & \Rightarrow & 4 & & 6 \\
(1,5) & & R & \Rightarrow & 1 & & 5 \\
(4,5) & & R & \Rightarrow & 4 & & 5
\end{array}$$

Úloha 3: Skládání relací
Mějme relace
$R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 2)\}$,
$S = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$,
$T = R \circ S$. (Definice $\circ$ je na další straně)

Pro T například platí $1T2$, protože $1R3$ a $3S2$. Toto lze zapsat jako $(1, 2) \in T$. Vyjádřete T jako množinu dvojic:

Relace dělitelnosti
V dalších příkladech se bude vyskytovat relace dělitelnosti. Tato relace se zapisuje $x|y$ a je interpretována jako "x dělí y". Při formálním dokazování se $x|y$ ukáže tak, že se najde vhodné celé číslo k takové, že $y = k \cdot x$. Níže jsou příklady:

- $5|-30$, protože $-30 = -6 \cdot 5$. V tomto případě je k rovno -6.
- $7|(21 \cdot z^2)$ pro $z \in \mathbb{Z}$, protože $(21 \cdot z^2) = (3 \cdot z^2) \cdot 7$. V tomto případě je k rovno $(3 \cdot z^2)$.

Vlastnosti relací
Pro relaci $R \subseteq X \times X$ nad libovolnou množinou X řekneme, že

- R je reflexivní, pokud $(\forall x \in X)[xRx]$.
- R je symetrická, pokud $(\forall x, y \in X)[xRy \Leftrightarrow yRx]$.
- R je tranzitivní, pokud $(\forall x, y, z \in X)[xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz]$.
- R je slabě antisymetrická, pokud $(\forall x, y)[xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y]$. Jinak řečeno, pro různé x a y platí nejvýše jedno z xRy a yRx.

Ekvivalence
Relaci R nazveme ekvivalencí, pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Pokud xRy, potom řekneme, že x a y patří do stejné třídy ekvivalence. Pokud $x\not{R}y$, potom x a y patří do různých tříd ekvivalence. Například relace

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 5), (5, 3), (4, 4)\} \text{ nad } A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

má tři třídy ekvivalence - $\{1, 2\}$,$\{3, 5\}$ a $\{4\}$. Všimněte si, že tyto tři množiny tvoří rozklad množiny A. Původní množinu je vždy možné takto rozložit na základě libovolné ekvivalence. (A naopak, libobovlný rozklad množiny definuje ekvivalenci).

Kombinace relací
Mějme relace R a S. Potom:

- R^{-1} je relace $\{(y, x) \mid xRy\}$. Tedy pokud xRy, potom $yR^{-1}x$ a pokud $x\not{R}y$, potom $y\not{R}^{-1}x$.
- Relace $R \circ S$ je relace $\{(x, z) \mid (\exists y)[xRy \wedge ySz]\}$.
- Jelikož jsou relace definované jako množiny dvojic, potom je lze kombinovat pomocí množinových operací. Např $R \cap S$, $R \cup S$ a $R \setminus S$ jsou také relace.

Pozor na kompatibilitu definičních oborů. Pokud pro R a S platí $R \subseteq A \times B$ a $S \subseteq B \times C$, potom $R^{-1} \subseteq B \times A$ a $(R \circ S) \subseteq A \times C$. Pro aplikaci množinových operací musí být R a S definované nad stejným kartézkým součinem množin.

Úloha 4: Třídy ekvivalence
Popište třídy ekvivalencí následujících relací:

- Relace R nad $\mathbb{Z}$ definována jako $xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$.
- Relace R nad $\mathbb{Z}$ definována jako $xRy \Leftrightarrow 7|(x - y)$.
- Relace R nad $\mathbb{N}$ definována jako $xRy \Leftrightarrow \lfloor x/3 \rfloor = \lfloor y/3 \rfloor$.

*** Úloha 5: Vlastnosti relací**
Pro následující relace rozhodněte, zda jsou reflexivní, symetrické, tranzitivní a slabě antisymetrické:

- Relace $\geq$ nad $\mathbb{Z}$.
- Relace $<$ nad $\mathbb{N}$.
- Relace $|$ nad $\mathbb{N}$.
- Relace $\neq$ nad $\mathbb{Z}$.
- Relace $\supseteq$ na podmnožinách libovolné množiny.
- Relace $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,4)\}$ nad $\{1,2,3,4\}$.
- Relace $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1),(1,3),(2,3),(3,3)\}$ nad $\{1,2,3,4\}$.

*** Úloha 6: Počítání relací**
Kolik existuje navzájem různých relací na množině $\{1, 2, \ldots, n\}$ takových, že jsou...

- libovolné
- reflexivní
- symetrické
- slabě antisymetrické

*** Úloha 7: Konstrukce relací**
Zkonstruujte relaci, která

- je reflexivní, není symetrická ani tranzitivní ani slabě antisymetrická.

- je symetrická, není reflexivní ani tranzitivní ani slabě antisymetrická.

- je tranzitivní, není reflexivní ani symetrická ani slabě antisymetrická.

- je slabě antisymetrická, není reflexivní ani symetrická ani tranzitivní.

Ke konstrukci můžete využít jak podmnožinu dvojic, tak běžnou relaci, tak kombinaci relací. Zvolený přístup se může mezi případy lišit. Nápověda: Vše lze sestrojit nad množinou $\{1, 2, 3\}$.

*** Úloha 8a: Uzavřenost kombinací 1**
Mějme relace R a S definované nad stejnou množinou. Obě relace jsou reflexivní. Jaké z následujících relací jsou nutně reflexivní, jaké nutně nejsou reflexivní a u jakých to nelze obecně rozhodnout?
R^{-1}, $R \circ S$, $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$

*** Úloha 8b: Uzavřenost kombinací 2**
Zadání je podobné jako pro úlohu 8a, jen místo reflexivity uvažujte, že R a S jsou symetrické a vyšetřujte symetrii u ostatních relací.

*** Úloha 8c: Uzavřenost kombinací 3**
Zadání je podobné jako pro úlohu 8a, jen místo reflexivity uvažujte, že R a S jsou tranzitivní a vyšetřujte tranzitivitu u ostatních relací.