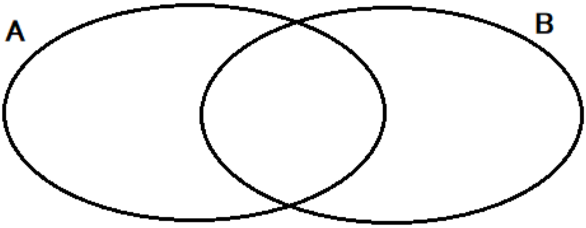
Cvičení 2 - Množiny a indukce (7.10.2024)

Úloha 1: Množiny 1

Rozmisťte prvky 1 až 8 do Vennova diagramu množin. Prvky mohou ležet i mimo obou množin.

$$A = \{1, 4, 5, 6\}; B = \{1, 3, 6, 7\}$$



Úloha 2: Množiny 2

Nyní na základě množin z předchozího cvičení určete obsah následujících množin.

$$\begin{aligned}
A &= \{1, 4, 5, 6\} \\
B &= \{1, 3, 6, 7\} \\
A \cap B &= \\
A \cup B &= \\
A \setminus B &= \\
B \setminus A &= \\
A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) &= \\
\emptyset &=
\end{aligned}$$

Úloha 3: Množinové relace

Předpokládejte, že A a B jsou libovolné množiny. Mezi každou dvojici množin doplňte "$\subseteq$" nebo "$\supseteq$" nebo "$=$". Pokud lze doplnit vše, upřednostněte rovnost.

A	$A \cup B$	$A \cup B$	$A \cap B$
A	$A \cap B$	$A \setminus B$	A
$\emptyset$	$A \cap \emptyset$	$\emptyset$	$A \cup \emptyset$

Úloha 4: Popis dvojice množin

Na obrázcích jsou dvojice množin a jejich prvky. Propojte obrázky množin s vzorci, které popisují situaci na těchto obrázcích. Některé popisy jsou platné pro více obrázků a naopak. Nápověda: z 35 možných spojnic je 15 správně.

$A = B$

$A \subseteq B$

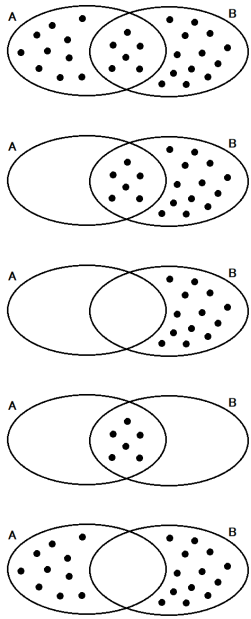
$A = \emptyset$

$A \cap B = \emptyset$

$A \setminus B = \emptyset$

$B \setminus A = B$

$A \cup B = B$



Úloha 5: Množiny a implikace

Mezi relace popisující vztah množin A a B doplňte platné implikace ($\Leftarrow$ nebo $\Rightarrow$). Pokud platí obě implikace, doplňte ekvivalenci ($\Leftrightarrow$). Pokud žádná implikace neplatí, doplňte otazník (?).

$A \cap B = \emptyset$		$A \setminus B = A$	$A \setminus B = A$		$A \subseteq B$
$A \cap B = \emptyset$		$A \subseteq B$	$A \setminus B = A$		$A \cup B = B$
$A \cap B = \emptyset$		$A \cup B = B$	$A \setminus B = A$		$A = B$
$A \cap B = \emptyset$		$A = B$	$A \subseteq B$		$A \cup B = B$
$A \cup B = B$		$A = B$	$A \subseteq B$		$A = B$

Úloha 6: Důkaz indukcí
Dokažte následující tvrzení pro všechna $n \in \mathbb{N}$ pomocí indukce:

- $\sum_{k=1}^{n} 2^k = (2^{n+1} - 2)$
- $\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = 1 - 2^{-n}$

Fibonacciho posloupnost
Fibonacciho posloupnost je nekonečná posloupnost čísel definována jako:

- $F_1 := 1$
- $F_2 := 1$
- Pokud $n \geq 3$, potom $F_n := F_{n-2} + F_{n-1}$

Úloha 7: Vlastnosti Fibonacciho posloupnosti
Dokažte následující tvrzení pro všechna $n \in \mathbb{N}$ pomocí indukce:

- $F_n \leq (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}$
- $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n \cdot F_{n+1}$
- $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$

* Úloha 8: Podmnožiny

Kolik navzájem různých množin je podmnožinou $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$?

* Úloha 9: Russellův paradox

Na základě axiomů teorie množin zápis níže nedefinuje množinu:

$$R = \{X | X \notin X\}$$

Předpokládejme, že tato definice by byla povolená díky (ne)vhodné náhradě tzv. schématu axiomů vydělení. Potom R je definována jako množina, která obsahuje všechny množiny, které neobsahují samy sebe, a je popsána tvrzením níže. Pomocí tohoto tvrzení charakterizující R dokažte spor, tj. vyvoďte tvrzení tvaru $(x \wedge \neg x)$, kde x může být libovolný výrok.

- $(\forall X)[X \in R \Leftrightarrow X \notin X]$

* Úloha 10: Princip inkluze a exkluze 1

Pro množiny A, B a C platí:

$$|A| = 6;\ |B| = 4;\ |C| = 5;$$

$$|A \cap B| = 3;\ |B \cap C| = 1;\ |A \cap C| = 3;\ |A \cap B \cap C| = 1;$$

Kolik prvků obsahuje $A \cup B \cup C$? Nápověda: Množiny jsou relativně malé, zkuste zkonstruovat příklad množin A, B a C, nejlépe s použitím Vennova diagramu.

* Úloha 11: Princip inkluze a exkluze 2

Určete obecný vzorec pro $|A \cup B \cup C|$ vyjádřený v závislosti na $|A|$, $|B|$, $|C|$, $|A \cap B|$, $|B \cap C|$, $|A \cap C|$ a $|A \cap B \cap C|$. Co je na tomto vzorci zajímavého? Volitelně zkuste popsat, jak by vypadal vzorec pro libovolný počet množin.