
Vzorová úloha z písemky
Definujte střední hodnotu náhodné veličiny. Nechť π je náhodná permutace množiny $[n]$ (všechny permutace mají stejnou pravděpodobnost; $[n] = \{1, \ldots, n\}$). Spočtěte střední hodnotu počtu $k \in [n]$ takových, že $\pi(k) = k + 1$.

Postup je podobný jako při důkazu, že permutace má jeden pevný bod.

Počítání relací
Určete počet relací na n prvcích - všech, reflexivních, symetrických, antisymetrických.

Počítání relací je jako zjišťování počtu podmnožin množiny $[n]^2$. Všech relací je $2^{(n^2)}$. U reflexivních relací je v podmnožinách nutně zahrnuto n prvků tvaru (x, x). Při počítání možností tyto prvky nezahrnujeme. Výsledek je $2^{(n^2-n)}$. Pro případy se symetrií a antisymetrií uvažujeme dvojice tvaru (x, y) a (y, x) dohromady.

Největší prvek ČUM
Končená ČUM $(X, \leq)$ má největší prvek $\Leftrightarrow$ má právě jeden maximální prvek. Dále, která z implikací platí pro nekonečnou ČUM?

V konečném i nekonečném případě se $\Rightarrow$ dokáže sporem - ilustrace: Pokud existují 2 maximální prvky potom žádný z nich nemůže být největší, protože by pod sebou neobsahoval ten druhý maximální prvek. Důkaz $\Leftarrow$ platí pouze v konečném případě a je delší.

Přímky v rovině
Ukažte, že n přímek takových, že žádné 3 neprocházejí jedním bodem a žádné dvě nejsou rovnoběžné dělí rovinu přesně na $\frac{n^2+n+2}{2}$ částí.

Dokazuje se indukcí. Jediná důležitá věc, kterou je si třeba uvědomit, že přímka číslo $n + 1$ protne všech dosavadních n přímek a projde $n + 1$ existujícími částmi roviny. Každou z těchto částí rozdělí na 2 části. Přidání přímky číslo $n + 1$ tedy zvýší počet částí o $n + 1$.

Těžká část důkazu věty o 5 barvách

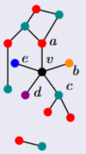
Věta o pěti barvách

Věta (Věta o pěti barvách)

Každý rovinný graf G lze obarvit pěti barvami.

Důkaz.

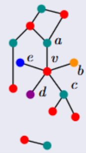
- Opět indukcí, jako u tvrzení s degenerovaností.
- V druhém IK: Najdeme v stupně ≤ 5, $H := G - v$. Obarvíme H pěti barvami z indukčního předpokladu.



- Pokud $\deg v \leq 4$, lze v dobarvit barvou, která není na jeho sousedech, máme obarvení G.
- Pokud $\deg v = 5$, ale sousedi používají ≤ 4 barvy, postupujeme stejně.
- Zbývá dořešit, když sousedi $(a, b, c, d, e$ v cykl. pořadí) mají přesně 5 barev.
- G_{ac}: indukovaný podgraf na vrcholech barev jako a či c. □

Důkaz věty o pěti barvách, pokračování

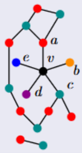
Důkaz, pokračování.



- G_{ac}: indukovaný podgraf na vrcholech barev jako a či c.
- Jsou-li a a c v různých komponentách G_{ac}, prohodíme barvy v komponentě obsahující a a dobarvíme v.
- Zbývá dořešit situaci, pokud a a c jsou v téže komponentě.

Důkaz věty o pěti barvách, pokračování

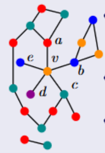
Důkaz, pokračování.



- G_{ac}: indukovaný podgraf na vrcholech barev jako a či c.
- Jsou-li a a c v různých komponentách G_{ac}, prohodíme barvy v komponentě obsahující a a dobarvíme v.
- Zbývá dořešit situaci, pokud a a c jsou v téže komponentě.
- Analogicky uvažujeme graf G_{be} to už b a e musejí být v různých komponentách.

Důkaz věty o pěti barvách, pokračování

Důkaz, pokračování.



- G_{ac}: indukovaný podgraf na vrcholech barev jako a či c.
- Jsou-li a a c v různých komponentách G_{ac}, prohodíme barvy v komponentě obsahující a a dobarvíme v.
- Zbývá dořešit situaci, pokud a a c jsou v téže komponentě.
- Analogicky uvažujeme graf G_{be} to už b a e musejí být v různých komponentách.
- Prohodíme barvy na komponentě s b a máme hotovo. □

Definice spojitosti

Funkce $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ je spojitá v bodě $a \in [0,1]$, pokud $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [0,1]) : |x - a| < \delta \Rightarrow dist(f(x), f(a)) < \epsilon$. Funkce $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ je spojitá, pokud je spojitá v každém bodě.

Definice tu je zahrnuta spíš pro úplnost. V DM se nezkouší, ale v analýze ano. Na hodině bude předvedeno, proč definice vypadá tak, jak vypadá.

Další náměty na procvičení

Níže jsou náměty na procvičení. Tato část je improvizovaná. Pokud budou otázky mimo hodiny, klidně je zodpovím přes email.

- Typy důkazů a jak to souvisí s logikou
- Intuitivní ukázka toho, proč funguje princip inkluze a exkluze
- Maximální a největší prvky
- Nekonečná částečná uspořádání
- Kombinatorické počítání
- Podmíněná pravděpodobnost
- Cvičení 8, úloha 4 (důkaz toho, že grafy nejsou izomorfní)
- Časté chyby při určování vztahů mezi grafovými vlastnostmi
- Jak rychle odvodit vzorce pro rovinné grafy.

Cvičení 8, Úloha 4: Neizomorfní grafy

Ukažte, že žádné dva grafy na obrázku nejsou izomorfní.