Rovinný graf a jeho vlastnosti

Graf $G = (V, E)$ nazveme **rovinný**, pokud ho lze nakreslit do roviny (na papír) tak, že se žádné dvě hrany neprotínají. Označme s počet stěn v libovolném nakreslení. Potom platí:

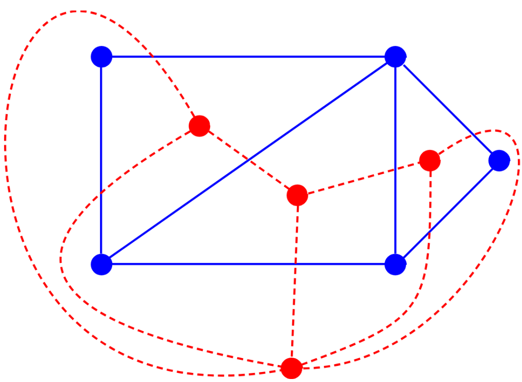
- $|V| - |E| + s = 2$
- Pokud $|V| \geq 3$ potom $|E| \leq 3|V| - 6$.
- Pokud $|V| \geq 3$ a neobsahuje trojúhelníky, potom $|E| \leq 2|V| - 4$.
- V každém rovinném grafu existuje vrchol v s $deg(v) \leq 5$.
- Princip sudosti pro stěny je $2|E| = \sum_f deg(f)$, kde f je stěna a $deg(f)$ je počet hran grafu ohraničující tuto stěnu.

Duální graf

Mějme rovinný (multi)graf $G = (V, E)$. K tomuto grafu definujeme **duální multigraf** G^* následovně:

- Pro každou stěnu f v G obsahuje G^* vrchol f.
- Pro každou hranu v G oddělující stěny f_1 a f_2 je v G^* hrana propojující vrchol f_1 a f_2.

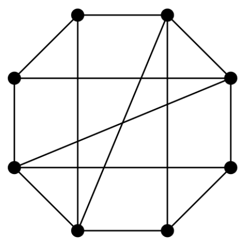
Příklad grafu a jeho duálu je níže. Všimněte si, že čárkovaný duální graf je multigraf, protože některé vrcholy jsou propojené dvěma hranami.



Barevnost grafu
Mějme graf $G = (V, E)$. **Obarvení grafu k barvami** je zobrazení $b : V \to [k]$ splňující $uv \in E \Rightarrow b(u) \neq b(v)$. Tedy zobrazení, které vrcholům přiřazuje čísla (barvy) 1 až k s tím, že sousední vrcholy nejsou očíslované stejně. **Chromatické číslo** (neboli barvenost) grafu G je nejmenší k, pro které G má obarvení k barvami.

Úloha 1: Rovinnost

Rozodněte, jestli je graf na obrázku rovinný. Skutečnost, že se hrany na obrázku kříží neznamená, že neexistuje rovinné nakreslení.



Úloha 2: Extrémy

Určete maximální možný počet stěn…

- v rovinném nakreslení rovinného grafu s n vrcholy.
- v rovinném nakreslení rovinného grafu s n vrcholy, pokud vnější je incidentní s k hranami.

Úloha 3: Doplněk rovinného grafu

Dokažte, že doplněk rovinného grafu s 11 vrcholy nemůže být rovinný.

Úloha 4: Kubické rovinné grafy

Existuje 3-regulární rovinný graf, který obsahuje:

- právě 12 šestiúhelníkových stěn (a žádné další)?
- právě 12 pětiúhelníkových stěn (a žádné další)?
- jednu dvacetiúhleníkovou stěnu, 10 pětiúhelníkových stěn (a žádné další)?

** Úloha 5: Kreslení jedním tahem

Dokažte, že každý eulerovský rovinný graf lze nakreslit do roviny jedním uzavřeným nekřížícím se tahem - různé průchody vrcholem se nesmí křížit.

Úloha 6: Barevnost

Dokažte větu o čtyřech barvách pro rovinné grafy bez trojúhelníků.

* Úloha 7: Mociny kružnic

Definujme k-tou mocninu G jako graf G^k, jehož množina vrcholů je shodná s G a dva vrcholy u a v jsou propojeny hranou, právě tehdy, když v původním grafu G vede mezi vrcholy u a v cesta délky nejvýše k. (Platí $G^1 = G$)

- V závislosti na n určete barevnost 3. mocniny kružnice $(C_n)^3$.
- V závislosti na n určete barevnost 5. mocniny kružnice $(C_n)^5$.

** Úloha 8: Sudé stupně a duál

Dokažte, že má-li rovinný graf sudé stupně, potom je barvenost jeho duálu rovná dvěma.