Strom

Strom je definován jako souvislý graf bez kružnic. Formálně lze dokázat, že následující je ekvivaletní:

- G je strom
- Pro každé dva vrcholy $x, y \in V$ existuje právě jedna cesta z x do y.
- G je souvislý a po odebrání libovolné hrany přestane být souvislý (pouze pokud $|V| \geq 2$)
- G je bez kružnic a po přidání libovoné hrany kružnice vznikne (pouze pokud $|V| \geq 3$)
- G je souvislý a $|E| = |V| - 1$

Důkazy indukcí pro stromy

Na přednášce bylo (nebo bude) představeno **tvrzení o trhání listů**, které říká, že pokud vrchol v má stupeň 1 v grafu G, potom G je strom právě když $G - v$ je strom.

Toto lze využít pro důkazy indukcí na stromech. Pokud se dokazuje platnost tvrzení W pro všechny stromy, potom dokážeme následující

- Tvrzení W platí pro graf obsahující jediný vrchol
- Pokud tvrzení W platí pro strom G, potom platí i pro strom G', který vznikl připojením nového listu k libovolnému vrcholu v G.

Dokázáním těchto dvou tvrzení dokážeme, že W platí pro všechny stromy.

Struktura důkazu stromovou indukcí může být upravena podobně jako při dokazování tvrzení pro množinu $\mathbb{N}$. Když se dokazovalo tvrzení pouze pro sudá čísla, tvrzení bylo dokázáno pro 2 a potom bylo dokázáno, že pokud tvrzení platí pro n, potom platí i pro $n + 2$. Zamyslete se nad tím, jak by se změnila strktura důkazu stromovou indukcí pro stromy sudé velikosti.

Tvrzení o existenci listů

Nechť G je strom a $V(G) \geq 2$. Potom G obsahuje nejméně 2 listy.

Úloha 1: Stromy a podrozdělení

Nechť G je graf. Z G vytvoříme nový graf G' tak, že všechny hrany G podrozdělíme. Jinak řečeno, G' obsahuje kopie vrcholů z G a pro každou hranu xy v G do G' vložíme nový vrchol v_{xy} a hrany xv_{xy} a $v_{xy}y$. Dokažte, že pokud G je strom, potom G' je strom. (Nápověda: Použijte stromovou indukci).

Úloha 2: Číslování vrcholů stromu

Dokažte, že pro každý strom s n vrcholy existuje pořadí vrcholů $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ takové, že pro každé $i > 1$ platí, že v_i má právě jednoho souseda v množině $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$

Úloha 3: Souvislost

Dokažte, že každý souvislý graf na $n \geq 3$ vrcholech obsahuje 2 vrcholy u a v takové, že všechny tři grafy $G - v$, $G - u$ a $G - u - v$ jsou souvislé.

Úloha 4: Ekvivalentní formulace stromu

Dokažte, že graf G je strom, právě když nemá kružnice a $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

Úloha 5: Stromy a stupně 1

Dokažte, že pokud strom obsahuje vrchol stupně k, potom obsahuje alespoň k listů.

*** Úloha 6: Stromy a stupně 2**

Mějme posloupnost čísel $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ takovou, že $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$. Dokažte, že $(d_1, \ldots, d_n)$ je skóre nějakého stromu.

*** Úloha 7: Stromy a stupně 3**

Mějme strom, který má $\ell > 0$ listů a v vnitřních vrcholů, přičemž každý vnitřní vrchol má stupeň 3. Dokažte, že platí $\ell = v + 2$.

Úloha 8: Stromy a nezávislé množiny
Dokažte, že každý strom s n vrcholy má nezávislou množinu velikosti alespoň $n/2$. Množina vrcholů je nezávislá, pokud žádné z jejích vrcholů nejsou propojeny hranou.

Úloha 9: Kostry a mosty
Ukažte, že každá kostra souvislého grafu obsahuje všechny mosty. Most je hrana e souvislého grafu G, taková, že graf $G - e$ není souvislý.

Úloha 10: Kombinatorické počítání koster
Spočtěte, kolik různých koster má:

- Kružnice s n vrcholy.
- "Činka" - dva cykly s m a n vrcholy spojené cestou délky ℓ.
- Θ-graf - dva vrcholy, mezi kterými vedou 3 různé cesty délek ℓ, m, n.